第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

R-n 模张量积与张量函子*

王少武 李维萍

（唐山业余工学院） （大连铁道学院）

文[1]引进了左 R-n 模范畴 ${}_RM_n^l$。本文是在 ${}_RM_n$ 中，建立相应的张量积，证明了它的存在性与唯一性，并讨论了张量函子与 Hom 函子的伴随性。

文中沿用[1]的记号。

1 引 理

设 M_0，$M_1\in \mathrm{ob}G_{r_n}$，定义一个 $M_0\times M_1$ 中运算如下：$(m_0^{(1)},m_1^{(1)})+\cdots+(m_0^{(n)},m_1^{(n)})=(m_0^{(1)}+\cdots+m_0^{(n)},m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)})$。

引理 1.1 若 M_0，$M_1\in \mathrm{ob}G_{r_n}$，则 $M_0\times M_1\in \mathrm{ob}G_{r_n}$（在上述运算下），且 $\overline{M_0\times M_1}=\bar{M}_0\times\bar{M}_1$。

证 易知 $M_0\times M_1$ 对运算是结合的。$\forall(m_0,m_1)\in M_0\times M_1$，$\exists!(\bar{m}_0,\bar{m}_1)$（因为 $\bar{m}_0$ 与 $\bar{m}_1$ 均是唯一）使得 $\forall(m_0',m_1')\in M_0\times M_1$，下式成立：$\underbrace{(m_0,m_1)+\cdots+(m_0,m_1)}_{n-2}+(\bar{m}_0,\bar{m}_1)+(m_0',m_1')=(\underbrace{m_0+\cdots+m_0}_{n-2}+\bar{m}_0+m_0',\ \underbrace{m_1+\cdots+m_1}_{n-2}+\bar{m}_1+m_1')=(m_0',m_1')$。所以 $(M_0\times M_1$，“+”)为 n-群；且由“−”的唯一性，$\overline{(m_0,m_1)}=(\bar{m}_0,\bar{m}_1)$。证毕。

若 $M_0\in \mathrm{ob}_RM_n^l$，$M_1\in \mathrm{ob}_sM_n^r$，则定义 $(r,s)\cdot(m_0,m_1)=(rm_0,m_1s)$，其中 $(r,s)+(r',s')=(r+r',\ s+s')$，$(r,s)\cdot(r',s')=(rr',\ s's)$。$R\times S$ 在此运算下成为环。易验证 $M_0\times M_1\in \mathrm{ob}_{R\times S}M_n^l$；${}_{R\times S}M_n^r$ 可类似定义。

R-n 商模的构造是由下面等价关系确定的等价类为元素，n- 加法和 R 的作用依照通常定义。m_0，m_1 称为在一个等价类中，若存在 $k(n-1)$ 个 $\widetilde{M}^*$（$\widetilde{M}^*$ 的定义见[1]p.24）中的元 m_i^*（$i=1,2,\cdots,k(n-1)$），使得 $m_1=m_0+m_1^*+m_2^*+\cdots+m_{k(n-1)}^*$ 成立。此关系为等价关系，R-n 商模 $M/\widetilde{M}^*$ 的元素记为 $\widetilde{m}^*$。

定义 1.2 $\forall M$，$N\in \mathrm{ob}_RM_n^l$（或 $\mathrm{ob}_RM_n^r$）称为拟同构的，若存在一个 R-n 模同构：$M/\widetilde{M}^*\to N/\widetilde{N}^*$，其中 $\widetilde{M}^*$ 同上。

*1983年8月3日收到。作者感谢于永溪、吴利生二位老师的指导。

引理 1.2 $\tilde{m}_0^* = \tilde{m}_1^*$（或记为 $m_0 \underset{\tilde{M}^*}{\cong} m_1$）$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \exists s \in \tilde{M}^* \ni m_0 + \bar{m}_1 + \underbrace{m_1 + \cdots + m_1}_{n-3} + s \in \tilde{M}^*$.

$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \exists s,\ t \in \tilde{M}^* \ni m_1 = m_0 + \underbrace{s + s + \cdots + s}_{n-2} + t$.

证 (2)易证.仅证(1).$\overset{(1)}{\Rightarrow}$由定义知 $m_0 = m_1 + m_1^* + \cdots + m_{k(n-1)}^*$，因为$\tilde{M} \neq \emptyset$，取$s \in \tilde{M} \subset \tilde{M}^*$, $m_0 + \bar{m}_1 + \underbrace{m_1 + \cdots + m_1}_{n-3} + s = (m_1 + m_1^* + \cdots + m_{k(n-1)}^*) + \bar{m}_1 + \underbrace{m_1 + \cdots + m_1}_{n-3} + s = m_1^* + m_2^* + \cdots + m_{k(n-1)}^* + s \in \tilde{M}^*$。$\overset{(1)}{\Leftarrow}$: 令 $t = m_0 + \bar{m}_1 + \underbrace{m_1 + \cdots + m_1}_{n-3} + s \in \tilde{M}^*$，式子两端同"加" $m_1 + \bar{s} + \underbrace{s + \cdots + s}_{n-3}$，得$m_0 = m_1 + \underbrace{s + \cdots + s}_{n-2} + t$，故 $\tilde{m}_0^* = \tilde{m}_1^*$，证毕。

引理 1.3 若 $f \in [M, N]$，且存在 $s \in N$ 使得 $f^{-1}(s)$ 为独点集，则 $\tilde{M}^* = M(f)$。其中 $M(f) = \{m \in M \mid f(m) \in \tilde{N}^*\}$。进而若 f 为 R-n 模满同态，则有 $f(\tilde{M}^*) = \tilde{N}^*$。

证 $\tilde{M}^* \subset M(f)$ 是显然的。$\forall m \in M(f)$，$f(m) = \overline{f(m)} \in \tilde{N}^*$。故 $\underbrace{f(m) + \cdots + f(m)}_{n-1} + f(f^{-1}(s)) = f(\underbrace{m + \cdots + m}_{n-1} + f^{-1}(s)) = f(f^{-1}(s)) = s$.由 $f^{-1}(s)$为独点集，故$f^{-1}(s) = \underbrace{m + \cdots + m}_{n-1} + f^{-1}(s)$即 $m = \bar{m} \in \tilde{M}^*$。当 f 为满态时，$\forall s \in \tilde{N}^*$，$\exists m \in M(f) \ni f(m) = s$。则有 $f(\tilde{M}^*) = \tilde{N}^*$。注意此时 $M(f) = \tilde{M}^*$。证毕。

引理 1.4 若M，$N \in \mathrm{ob}_R M_n^!$，$f \in [M, N]$为 $R-n$ 模满同态，M 满足（E）条件（见[1]）且存在 $s \in N$ 使得 $f^{-1}(s)$为独点集，则M与N为拟同构的。

证 欲证 $\tilde{f}^*$: $M/\tilde{M}^* \to N/\tilde{N}^*$ 为同构。定义 $\tilde{f}^*(\tilde{m}^*) = \widetilde{f(m)}^*$。出现的等价类的运算均指商模中的运算。$\tilde{f}^*(\tilde{m}_1^* + \cdots + \tilde{m}_n^*) = \tilde{f}^*(\widetilde{m_1 + \cdots + m_n}^*) = \widetilde{f(m_1 + \cdots + m_n)}^* = \widetilde{f(m_1)}^* + \cdots + \widetilde{f(m_n)}^* = \tilde{f}^*(\tilde{m}_1^*) + \tilde{f}^*(\tilde{m}_2^*) + \cdots + \tilde{f}^*(\tilde{m}_n^*)$。同样可证 $\tilde{f}^*(r\tilde{m}^*) = r\tilde{f}^*(\tilde{m}^*)$。故 $\tilde{f}^*$ 为 R-n 模同态。若 $\tilde{f}^*(\tilde{m}^*) = \tilde{f}^*(\tilde{m}_1^*)$，即$\widetilde{f(m)}^* = \widetilde{f(m_1)}^*$。则 $\exists n_i \in \tilde{N}^*$，$i = 1, 2, \cdots, k(n-1)$，使得 $f(m) = f(m_1) + n_1 + n_2 + \cdots + n_{k(n-1)}$。由引理 1.3, $\tilde{N}^* = f(\tilde{M}^*)$，所以 $\exists m_i^* \in \tilde{M}^*$ 使得 $f(m_i^*) = n_i$，$i = 1, 2, \cdots, k(n-1)$。于是 $f(m) = f(m_1 + m_1^* + \cdots + m_{k(n-1)}^*)$。令 $m_2 = m_1 + m_1^* + \cdots + m_{k(n-1)}^*$，则 $f(m) = f(m_2)$。于是 $s = \underbrace{f(m) + \cdots + f(m)}_{n-2} + \overline{f(m_2)} + f(f^{-1}(s)) = f(\underbrace{m + \cdots + m}_{n-2} + \bar{m}_2 + f^{-1}(s))$，由 $f^{-1}(s)$ 为独点集有：$\underbrace{m + \cdots + m}_{n-2} + \bar{m}_2 + f^{-1}(s) = f^{-1}(s)$，故$\bar{m} = \bar{m}_2$，$M$ 满足（E）条件，故 $m = m_2 = m_1 + m_1^* + \cdots + m_{k(n-1)}^*$。这表明 $\tilde{f}^*$ 是单的。又由 f 的满性及 $\tilde{N}^* = f(\tilde{M}^*)$，易知 $\tilde{f}^*$ 也是满的。故 $\tilde{f}^*$ 是 R-n 模同构。证毕。

引理 1.5 若 $M \in \mathrm{ob}_R M_n^!$ 满足（E）条件，则"$\sim *$"运算（$m \longmapsto \tilde{m}^*$）与"$-$"运算（$m \longmapsto \bar{m}$）可换。即有$\overline{\tilde{m}^*} = \tilde{\bar{m}}^* = \{\bar{p} \mid p \in \tilde{m}^*\}$。

证 $\forall p \in \tilde{m}^*$，$p = m + r_1 + \cdots + r_{k(n-1)}$，存在 $r_i \in \tilde{M}^*$，$i = 1, 2, \cdots, k(n-1)$。故 $\bar{p} = \bar{m} + r_1 + \cdots + r_{k(n-1)}$，故$\bar{p} \in \tilde{\bar{m}}^*$即 $\{\bar{p} \mid p \in \tilde{m}^*\} \subset \tilde{\bar{m}}^*$。$\forall p \in \tilde{\bar{m}}^*$，$p = \bar{m} + r_1 + \cdots + r_{k(n-1)}$，则 $\bar{p} = m + r_1 + \cdots + r_{k(n-1)} \Rightarrow \bar{p} \in \tilde{m}^*$，而 $p = \overline{(\bar{p})}$ 故 $\tilde{\bar{m}}^* \subset \overline{\tilde{m}^*}$。证毕。

2 交换自由n-群

我们采用自由生成群的方法，讨论由任意一个集合生成其上的交换自由n-群。

设A为一集合。$WA=\{\omega=a_1^{\epsilon_1}\cdots a_t^{\epsilon_t}|a_i\in A,\ \epsilon_i=\pm1,\ i=1,2,\cdots,t=k(n-1)+1,k=0,1,2,\cdots\}$。$WA$中的元素称为字，$t$为字的长度。$a_1\in A$，记$a_1^1\in WA$。$a_1^{-1}$为字符。有$A\rightarrowtail WA$的单射。$\omega_1=b_1^{\epsilon_1'}\cdots b_s^{\epsilon_s'}$则$\omega=\omega_1$当且仅当$s=t$，$b_i=a_i$，$\epsilon_i=\epsilon_i'$，$i=1,2,\cdots,s$。在$WA$中$k'(n-1)+1$个字才有毗连：$\omega_1\cdots\cdots\omega_n=a_{11}^{\epsilon_{11}}\cdots a_{t_11}^{\epsilon_{t_11}}\cdot a_{12}^{\epsilon_{12}}\cdots a_{t_22}^{\epsilon_{t_22}}\cdots a_{1n}^{\epsilon_{1n}}\cdots a_{t_nn}^{\epsilon_{t_nn}}$。易知毗连是结合的。而$\omega$的约化过程为：若$a_{i+1}=a_{i+2}=\cdots=a_{i+n-1}\wedge\epsilon_{i+1}=\epsilon_{i+2}=\cdots=\epsilon_{i+n-2}=-\epsilon_{i+n-1}$，则$\omega\to\omega'=a_1^{\epsilon_1}\cdots a_i^{\epsilon_i}\cdot a_{i+n}^{\epsilon_{i+n}}\cdots a_t^{\epsilon_t}$。

定义一个关系R：$\omega R\omega'$当且仅当$\exists\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\ni\omega=\omega_1,\omega_m=\omega'$且$\forall i,\omega_i\to\omega_{i+1}$或$\omega_{i+1}\to\omega_i$。则此关系$R$为等价的。记$FA$是$R$确定的等价类的集合，元素记作$[\omega]$。

引理 2.1　若$\omega\to\omega_1\wedge\omega\to\omega_2$，则存在$\omega_3$，使得$\omega_1\to\omega_3$，$\omega_2\to\omega_3$。

证　$\omega=a_1^{\epsilon_1}\cdots a_i^{\epsilon_i}\cdot a_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}\cdots a_{i+n}^{\epsilon_{i+n}}a_{i+n+1}^{\epsilon_{i+n+1}}\cdots a_j^{\epsilon_j}a_{j+1}^{\epsilon_{j+1}}\cdots a_{j+n}^{\epsilon_{j+n}}\cdots a_t^{\epsilon_t}$。其中$a_{i+1}=a_{i+2}=\cdots=a_{i+n-1}$，$a_{j+1}a_{j+2}=\cdots=a_{j+n-1}$，$\epsilon_{i+1}=\cdots=\epsilon_{i+n-2}=-\epsilon_{i+n-1}$，$\epsilon_{j+1}=\epsilon_{j+2}=\cdots=\epsilon_{j+n-2}=-\epsilon_{j+n-1}$，$(i+1)+2(n-1)+1\leqslant(j+1)+(n-1)\leqslant t=k(n-1)+1$，$k\geqslant2$。$\omega_1=a_1^{\epsilon_1}\cdots a_i^{\epsilon_i}a_{i+n}^{\epsilon_{i+n}}\cdots a_j^{\epsilon_j}a_{j+1}^{\epsilon_{j+1}}\cdots a_t^{\epsilon_t}$，$\omega_2=a_1^{\epsilon_1}\cdots a_i^{\epsilon_i}a_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}\cdots a_j^{\epsilon_j}a_{j+n}^{\epsilon_{j+n}}\cdots a_t^{\epsilon_t}$。取$\omega_3=a_1^{\epsilon_1}\cdots a_i^{\epsilon_i}a_{i+n}^{\epsilon_{i+n}}\cdots a_j^{\epsilon_j}a_{j+n}^{\epsilon_{j+n}}\cdots a_t^{\epsilon_t}$。证毕。

引理 2.2　等价类$[\omega]$在关系R下只有一个约化最终的字（即不能再进行约化过程）。

由于约化过程确定了一个自反传递的关系及引理2.1可证引理2.2.([4])。

FA中介定一运算"$\circ$"：$[\omega_1]\circ[\omega_2]\circ\cdots\circ[\omega_n]=[\omega_1\omega_2\cdots\omega_n]$。若$\omega_iR\omega_i'$，由毗连知$\omega_1\cdot\omega_2\cdot\cdots\omega_i\cdots\omega_nR\omega_1\cdot\omega_2\cdots\omega_i'\cdots\omega_n$。所以对$\omega_iR\omega_i'$，$i=1,2,\cdots,n$，有$\omega_1\cdots\omega_nR\omega_1'\cdots\omega_n'$。则运算"$\circ$"不依赖于等价类中所取得代表元，而由毗连的结合性知"$\circ$"是结合的。则$(FA,\circ)$为n-半群，称为由集合A生成的自由n-半群。以下假设字的排列可换，$WA^{-1}=\{\omega^{-1}=a_t^{-\epsilon_t}\cdots a_1^{-\epsilon_1}|\omega\in WA\}=WA$有：$\forall[\omega_1],\cdots,[\omega_{n-2}]$，$[\omega]\in FA,\exists![\omega_{n-1}]=[\underbrace{\omega_{n-2}\cdots\omega_{n-2}}_{n-3}\cdot\omega_{n-2}^{-1}\cdot\cdots\cdot\underbrace{\omega_1\cdots\cdot\omega_1}_{n-3}\omega_1^{-1}]\ni[\omega_1]\circ[\omega_2]\circ\cdots\circ[\omega_{n-2}]\circ[\omega_{n-1}]\circ[\omega]=[\omega]$。故$(FA,\circ)$为交换$n$-群。我们有$\overline{[\omega]}=[\omega^{-1}]$且$\underbrace{[\omega^{-1}]\circ[\omega^{-1}]\circ\cdots\circ[\omega^{-1}]}_{n-2}\circ[\omega]\circ[\omega^{-1}]=[\omega^{-1}]$，故$\overline{\overline{[\omega]}}=[\omega]$，即$(FA,\circ)$为满足（$E$）条件的自由交换$n$-群。

命题 2.3　对任何集合X，存在自由交换n-群M和函数p：$X\to UM$具有下列泛性质：对任何交换n-群N与函数h：$X\to UN$，存在唯一的h'：$M\to N$为n-群同态，使得$h=Uh'\circ p$，其中U：$AGr_n\to$Set为交换n-群范畴的基函子（underlying functor）。

证　注意到取$M=FX$，p：$x\to[x']$，定义h'：$(M,\circ)\to(N,+)$（$[x]\longmapsto h(x)$，$[\bar{x}]\longmapsto h(\bar{x})$），则易得证此命题。证毕。

由此命题知同一集上生成的自由交换n-群在同构意义下是唯一的。

对f：$X\to Y$，Wf：$WX\to WY$（$a_1^{\epsilon_1}\cdots a_t^{\epsilon_t}\longmapsto f_{(a_1)}^{\epsilon_1}\cdots f_{(a_t)}^{\epsilon_t}$）。即可把$X$的字映入$Y$的字且保持约化过程，由引理2.2，$Ff$：$FX\to FY$（$[\omega]\longmapsto[f(\omega)]$）是良定的且为$n$-群同态。则可证$F$：Set$\to AGr_n$为一函子且可知$U$：$AGr_n\to$Set为守信的（faithful）。

引理 2.4 设 F: Set→AGr_n, U: AGr_n→Set, 则 $F \dashv U$.

引理 2.5 （参考[2] p.82 命题10.4）。设 $F \dashv U$，则上单元（counit）δ: $FUM \to M$ 是满射。故 AGr_n 中每个对象都是一个自由对象的像。

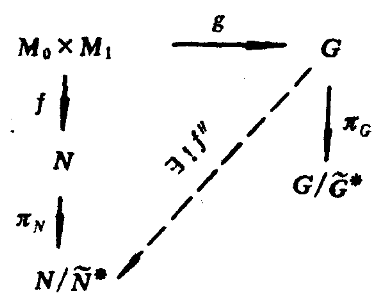
定义 2.6 设 U: AGr_n→Set 为守信的基函子且 $F \dashv U$. 则 $\forall X \in$ ob Set，FX 称为 AGr_n 中（相对 U）的交换自由 n- 群。

注 对交换自由 n- 群运算使用 "$\cdot$" 而不是 "+"，只是为了突出"字"的运算，是没有质的差别的。下一节对生成 n- 群的可交换运算仍用 "$\cdot$"。

3 R-n 模张量积的存在性与唯一性

定义 3.1 对 $M_0 \in \mathrm{ob}_R M_n^l$，$M_1 \in \mathrm{ob}_R M_n^r$，若存在 (G, g)，其中 $G \in \mathrm{ob} AGr_n$，g: $M_0 \times M_1 \to G$ 为双线性映射使得 $\forall N \in \mathrm{ob}_R M_n^l$（或 $\mathrm{ob}_R M_n^r$）及双线性映射 f：$M_0 \times M_1 \to N$ 都有唯一的 n- 群同态 f''：$G \to N/\widetilde{N}^*$ 使下图可换，其中 π_N：$N \to N/\widetilde{N}^*$ 为自然 n- 群同态，则称（$G/\widetilde{G}^*$，$\pi_G \circ g$）为 M_0 与 M_1 的 R-n 模张量积，它是一个 n-商群，记作 $M_0 \otimes_n M_1$.

此定义在 $n=2$ 时即为通常模张量积的定义。



定理 3.2 设 $M_0 \in \mathrm{ob}_R M_n^l$，$M_1 \in \mathrm{ob}_R M_n^r$；则存在交换 n-群 G 与双线性映射 g: $M_0 \times M_1 \to G$ 使得对任意 $N \in \mathrm{ob}_R M_n^l$（或 $\mathrm{ob}_R M_n^r$）及双线性映射 f，有上述图可换且 $G/\widetilde{G}^*$ 唯一。

证 取 $C = F(M_0 \times M_1)$ 为交换自由 n-群（由2）。D 为由下列元素生成的 C 的交换 n- 子群：

$$D_1\text{: } [(m, m_1)] \circ [(m_0^{(1)}, m_1)^{-1}] \circ \cdots \circ [(m_0^{(n)}, m_1)^{-1}] \circ \underbrace{[(m_{0*}, m_{1*})] \circ \cdots \circ [(m_{0*}, m_{1*})]}_{n-2}$$

$$D_2\text{: } [(m_0, m_1)] \circ [(m_0, m_1^{(1)})^{-1}] \circ \cdots \circ [(m_0, m_1^{(n)})^{-1}] \circ \underbrace{[(m_{0*}, m_{1*})] \circ \cdots \circ [(m_{0*}, m_{1*})]}_{n-2}$$

$$D_3 \begin{cases} [(m_{00}, m_1)] \circ [(m_0, m_{11})^{-1}] \circ \underbrace{[(m_{0*}, m_{1*})] \circ \cdots \circ [(m_{0*}, m_{1*})]}_{n-2} \\ [(m_{00}, m_1)^{-1}] \circ [m_0, m_{11})] \circ [(m_{0*}, m_{1*})] \circ \cdots \circ [(m_{0*}, m_{1*})] \end{cases}$$

其中 $m_{0*} \in \widetilde{M}_0^*$，$m_{1*} \in \widetilde{M}_1^*$，$m = m_0^{(1)} + \cdots + m_0^{(n)}$，$m_{00} = rm_0$，$m_1 = m_1^{(1)} + \cdots + m_1^{(n)}$，$m_{11} = m_1 r$. 令 $m_{00} = m_0 = m_{0*}$，$m_{11} = m_1 = m_{1*}$ 则得 $[(m_{0*}, m_{1*})] \in D$，即 $\widetilde{C}^* \subset D$，同样易证 $D \subset \widetilde{C}^*$，则 $D = \widetilde{C}^*$.

令 $G = (C/D, *)$ 为 n- 商群。由引理1.2且注意 C 中运算为 "$\circ$"。

$$(*) \qquad C_0 \underset{D}{\cong} C_1 \Leftrightarrow \exists S \in D \ni C_0 \circ \bar{C} \circ \underbrace{C_1 \circ \cdots \circ C_1}_{n-3} \circ S \in D$$

把 C 中的基元素 $[(m_0, m_1)]$ 在 G 中自然同态下的像记作 $m_0 \boxtimes_n m_1$，定义 g: $M_0 \times M_1 \to G$ $((m_0, m_1) \longmapsto m_0 \boxtimes_n m_1)$。$G$ 也可记作 $M_0 \boxtimes_n M_1$. 以下验证 g 为双线性的：

首先我们注意在 C 中有 $\overline{[(m_0^{(1)}, m_1)] \circ [(m_0^{(2)}, m_1)] \circ \cdots \circ [(m_0^{(n)}, m_1)]} = \overline{[(m_0^{(1)}, m_1) \cdot (m_0^{(2)}, m_1) \cdot \cdots \cdot (m_0^{(n)}, m_1)]} = [((m_0^{(1)}, m_1) \cdot (m_0^{(2)}, m_1) \cdot \cdots \cdot (m_0^{(n)}, m_1))^{-1}] = [(m_0^{(1)}, m_1)^{-1}$

$(m_0^{(2)},m_1)^{-1}\cdots(m_0^{(n)},m_1)^{-1}]=[(m_0^{(1)},m_1)^{-1}]\circ[(m_0^{(2)},m_1)^{-1}]\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)^{-1}]$。取 $s=[(m_0^{(1)},m_1)]\circ[(m_0^{(1)},m_1)^{-1}]\circ\underbrace{[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]}_{n-2}\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)]\circ[(m_0^{(n)},m_1)^{-1}]\circ\underbrace{[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]}_{n-2}\in D$，$C_1=[(m_0^{(1)},m_1)]\circ[(m_0^{(2)},m_1)]\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)]$。$[(m,m_1)]\circ\bar{C}\circ\underbrace{C_1\circ\cdots\circ C_1}_{n-3}\circ s=[(m,m_1)]\circ([m_0^{(1)},m_1)^{-1}]\circ[(m_0^{(2)},m_1)^{-1}]\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)])$。$\underbrace{([(m_0^{(1)},m_1)]\circ[(m_0^{(2)},m_1)]\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)])\circ\cdots\circ([(m_0^{(1)},m_1)]\circ[(m_0^{(2)},m_1)]\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)])}_{n-3}\circ[(m_0^{(1)},m_1)]\circ[(m_0^{(1)},m_1)^{-1}]\circ\underbrace{[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]}_{n-2}\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)]\circ[(m_0^{(n)},m_1)^{-1}]\circ\underbrace{[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]}_{n-2}=[(m,m_1)]\circ[(m_0^{(1)},m_1)^{-1}]\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)^{-1}]\circ\underbrace{[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]}_{n-2}\in D$（使用交换性与约化过程），故由（*）式知 $g(m_0^{(1)}+\cdots+m_0^{(n)},m_1)=g(m_0^{(1)},m_1)*g(m_0^{(2)},m_1)*\cdots*g(m_0^{(n)},m_1)$。类似可证 $g(m_0,m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)})=g(m_0,m_1^{(1)})*g(m_0,m_1^{(2)})*\cdots*g(m_0,m_1^{(n)})$。

当取 $S=[(m_{00},m_1)^{-1}]\circ[(m_0,m_{11})]\circ[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]\in D$。$[(m_{00},m_1)]\circ\overline{[(m_0,m_{11})]}\circ\underbrace{[(m_0,m_{11})]\circ\cdots\circ[(m_0,m_{11})]}_{n-3}\circ S=[(m_{00},m_1)]\circ[(m_0,m_{11}^{-1}]\circ\underbrace{[(m_0,m_{11})]\circ\cdots\circ[(m_0,m_{11})]}_{n-3}\circ[(m_{00},m_1)^{-1}]\circ[(m_0,m_{11})]\circ\underbrace{[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]}_{n-2}=[m_{00},m_1)]\circ[(m_{00},m_1)^{-1}]\cdot[(m_{0*},m_{1*})]\cdot\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]\in D$，当取 $m_{00}=1_R\cdot m_{00}$，$m_1=m_1\cdot 1_R$时，知上式$\in D$。由（*）式得 $g(rm_0,m_1)=g(m_0,m_1r)$。即得 g 为双加性的。

其次 $\forall N\in \mathrm{ob}_R M_n^l$（或 $\mathrm{ob}_R M_n^r$），f：$M_0\times M_1\to N$ 为双线性的。$M_0\times M_1$ 为 n-群（见1.），N看作交换 n-群。定义 $\bar f$：$(C,\circ)\to(N,+)$ （$[m_0,m_1)]\mapsto f(m_0,m_1)$，$\overline{[(m_0,m_1)]}\mapsto\overline{f(m_0,m_1)}$）。$\bar f([(m_0,m_1)^{-1}]=\bar f(\overline{[(m_0,m_1)]})=\overline{f(m_0,m_1)}=f(\bar m_0,\bar n_0)$，$d_1\in D_1$，$\bar f(\bar d_1)=\bar f(d_1)=\bar f(\overline{[(m,m_1)]}\circ\overline{[(m_0^{(1)},m_1)^{-1}]}\circ\cdots\circ\overline{[(m_0^{(n)},m_1)^{-1}]}\circ\overline{\underbrace{[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]}_{n-2}})=\bar f(\overline{[(m,m_1)]}\circ[(m_0^{(1)},m_1)]\circ\cdots\circ[(m_0^{(n)},m_1)]\circ\overline{\underbrace{[(m_{0*},m_{1*})]\circ\cdots\circ[(m_{0*},m_{1*})]}_{n-2}})=\overline{f(m,m_1)}+\cdots+\overline{f(m_0^{(n)},m_1)}+f(m_0^{(1)},m_1)+\cdots+f(m_0^{(n)},m_1)+\underbrace{f(m_{0*},m_{1*})+\cdots+f(m_{0*},m_{1*})}_{n-2}$（由 f 的双线性）$=\bar f(d_1)$。其余类似检验。得 $\bar f$：$D\to\tilde N^*$。所以 $\bar f$ 诱导出 n-群同态 f''：$G(=(C/D,*))\to N/\tilde N^*$ 满足 $\pi_N\circ f=f''\circ g$。故 $M_0\otimes_n M_1=M/\tilde M^*$ 存在。

f'' 的唯一性可由 g 的满性得知。证毕。

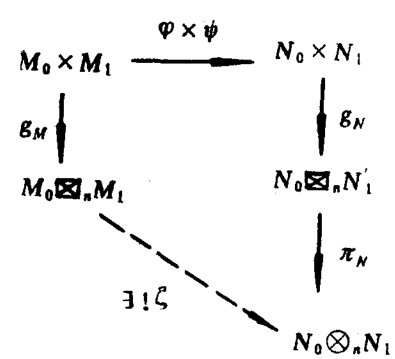
4. 张量函子的伴随性

引理 4.1 设 $M\in \mathrm{ob}_R M_n^l$，$N\in \mathrm{ob}_R M_n^r$，则 $\widetilde{M\boxtimes_n N^*}\supset \widetilde{M}^*\boxtimes_n N$（或 $M\boxtimes_n \widetilde{N}^*$）。为交换 n- 子群。

证 $g(m_1,n_1)*\cdots*g(m_1,n_1)*g(\bar{m}_1,n_1)=g(\underbrace{m_1+\cdots+m_1}_{n-1}+\bar{m}_1,n_1)=g(m_1,n_1)$，由“$-$”的唯一性，有 $g(\bar{m}_1,n_1)=\overline{g(m_1,n_1)}$。即 $\widetilde{M}^*\boxtimes_n N\subset M\boxtimes_n N^*$。同理可证 $\overline{g(m_1,n_1)}=g(m,\bar{n}_1)$。证毕。

由上引理知 $\overline{g(m_1,n_1)}=g(\bar{m}_1,n_1)=g(m_1,n_1)$ 故 $(\bar{m}_1,n_1)\underset{C*}{\cong}(m_1,n_1)\Rightarrow \bar{m}_1\underset{M}{\cong}m_1$ 即 $\widetilde{m}_1^*=\widetilde{\bar{m}}_1^*=\overline{\widetilde{m}_1^*}$。则有 $\widetilde{M\boxtimes_n N^*}\subset M'\boxtimes_n N$，其中 $M'=\{m\,|\,\widetilde{m}^*=\overline{\widetilde{m}^*}\}$。$\widetilde{M}^*\subset M'$。一般地说 $\widetilde{M}^*\neq M'$。

利用引理 1.5 与上述引理得 $\overline{m\otimes_n n}=\bar{m}\otimes_n n=m\otimes_n \bar{n}$。



设 M_0，$N_0\in \mathrm{ob}_R M_n^l$，$\varphi\in[M_0,N_0]$，$M_1$，$N_1\in \mathrm{ob}_R M_n^r$，$\psi\in[M_1,N_1]$，由张量积的泛性 $\exists!\zeta$ 使上图可换。易知 $\zeta:\widetilde{M_0\boxtimes_n M_1^*}\to \widetilde{N_0\boxtimes_n N_1^*}$ 故 ζ 诱导出 $\bar{\zeta}$：$M_0\otimes_n M_1\to N_0\otimes N_1$ 为 n- 群同态，记此 $\bar{\zeta}$ 为 $\varphi\otimes_n\psi$。设 $P_0\in \mathrm{ob}_R M_n^l$，$P_1\in \mathrm{ob}_R M_n^r$，$\varphi'\in[N_0,P_0]$，$\psi'\in[N_1,P_1]$，由同态所满足的性质有：$(\varphi'\otimes_n\psi')\circ((\varphi\otimes_n\psi)\circ\pi_M\circ g_M)=((\varphi'\otimes_n\psi')|\pi_N\circ g_N)\circ\varphi\times\psi=\pi_P\circ g_P\circ(\varphi'\times\psi')\circ(\varphi\times\psi)=\pi_P\circ g_P\circ(\varphi'\varphi\times\psi'\psi)=(\varphi'\varphi\otimes_n\psi'\psi)\circ\pi_M\circ g_M$。由 π_M，g_M 为满同态，故 $(\varphi'\otimes_n\psi')\circ(\varphi\otimes_n\psi)=(\varphi'\varphi\otimes_n\psi'\psi)$。

命题 4.2 若 $M\in \mathrm{ob}_R M_n^r$，$\left.\begin{matrix}-\otimes_n M\\ -\otimes_n I_M\end{matrix}\right\}$ 定义了一个函子：${}_RM_n^l\to AG'_{rn}$。（其中 AG'_{rn} 表示 $\widetilde{G}=\widetilde{G}^*$ 为独点集的交换 n- 群范畴）；类似地有 $M\in \mathrm{ob}_R M_n^l$，$\left.\begin{matrix}M\otimes_n -\\ I_M\otimes_n -\end{matrix}\right\}$：${}_RM_n^r\to AG'_{rn}$。并且 $-\otimes_n-$：${}_RM_n^l\times{}_RM_n^r\to AG'_{rn}$ 为一双函子。

证 $-\otimes_n-$ 为双函子是由张量同态的复合得到的。$(\varphi\otimes_n I_{M_1'})\circ(I_{M_1}\otimes_n\psi)=\varphi\otimes_n\psi=(I'_{M_1}\otimes_n\psi)\circ(\varphi\otimes_n I_{M_1})$，故下图可换。

$$\begin{array}{ccc} M_1\otimes_n M_2 & \xrightarrow{\varphi\otimes_n 1_{M_2}} & M_1'\otimes_n M_2 \\ 1_{M_1}\otimes_n\psi\downarrow & & \downarrow 1_{M_1'}\otimes_n\psi \\ M_1\otimes_n M_2' & \xrightarrow{\varphi\otimes_n 1_{M_2'}} & M_1'\otimes_n M_2' \end{array}$$

证毕。

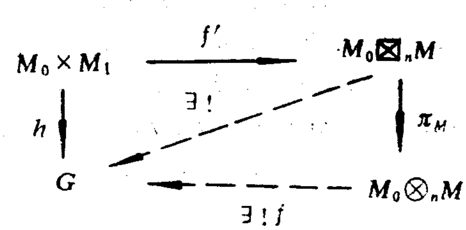
$n=2$ 时此命题即为[2]中 $p.110$ 的命题 7.1.

定理 4.3 （伴随同构定理）。$\forall M_0\in \mathrm{ob}_R M_n^l$，$M\in \mathrm{ob}_R M_n^r$，$G\in \mathrm{ob}AG'_{r,n}$，存在匹满的 η：$\mathrm{Hom}(M_0\otimes_n M,\ G)\to \mathrm{Hom}_R(M_0,\ \mathrm{Hom}(M,G))$ 且对 M_0，G是自然的。

注 函子 $\mathrm{Hom}(M,-)$：$AG'_{r,n}\to {}_RM_n^l$，定义 $rf(m)=f(rm)$，$\forall f\in \mathrm{Hom}(M,\ G)$ 使得 $\mathrm{Hom}(M,G)$为左 R-n 模（参看[2]$I.8$）。

证 $\forall f\in \mathrm{Hom}(M_0\otimes_n M,\ G)$，$\forall m_0\in M_0$，$f_{m_0}$：$\begin{matrix} M\longrightarrow G \\ m\longmapsto f(m_0\otimes_n m)\end{matrix}$. 故$f\in \mathrm{Hom}(M,G)$，定义 g：$m_0\longmapsto f_{m_0}$：$(g_{(m_0^{(1)}+\cdots+m_0^{(n)})})(m)=(g_{m_0^{(1)}+\cdots+m_0^{(n)}}(m)=f((m_0^{(1)}+\cdots+m_0^{(n)})\otimes_n M)=f(m_0^{(1)}\otimes_n m)+\cdots+f(m_0^{(n)}\otimes m)=(g_{(m_0^{(1)}}+\cdots+g_{(m_0^{(n)})})(m)$。$g_{(rm_0)}(m)=(f_{rm_0})(m)=f(rm_0\otimes_n m)=rf(m_0\otimes_n m)=r(g_{(m_0)})(m)$。故 $g\in \mathrm{Hom}_R(M_0,\ \mathrm{Hom}(M,G))$。定义 η：$f\longmapsto g$。

$\forall g\in \mathrm{Hom}_R(M_0,\mathrm{Hom}(M,g))$，由于 $G\in \mathrm{ob}AG'_{r,n}$，故有下图可换。



取 $h=f\circ\pi_M\circ f'$，则 h 的双线性性是显然的。令$h(m_0,\ m)=(g_{m_0})(m)$。而 $h(m_0,m)=f(m_0\otimes_n m)$，定义 σ：$g\to f$。有 $\sigma\eta(f_{m_0}(m))=f_{m_0}(m)$，$\eta\sigma((g(m_0)(m))=(g_{m_0})(m)$。则 σ 与 η 互为逆射，从而 η 是匹满的.下面验证 η 对G是自然的，$\forall\varphi\in \mathrm{Hom}(G,G')$，$\forall f\in \mathrm{Hom}(M_0\otimes_n M,G)$，$\forall m_0\in M_0$，$m\in M$。

$[\mathrm{Hom}_R(l_{M_0},\ \mathrm{Hom}(l_M,\varphi))\circ\eta_G](f_{m_0}(m))=\mathrm{Hom}(l_M,\varphi)(g_{(m_0)}(m))=\varphi(g_{(m_0)}(m))$
$=\varphi(f(m_0\otimes_n m))$.

$$[\eta_{G'}\circ \mathrm{Hom}(l_{M_0\otimes_n M},\varphi)](f_{m_0}(m))=\eta_{G'}(\varphi\circ f_{m_0}(m))=\varphi(f(m_0\otimes_n m)).$$

由此上述图可换。故对G是自然的。对 M_0 是自然的类似可证。证毕。

定理 4.4 函子 $\left.\begin{matrix}-\otimes_n M\\ -\otimes_n I_M\end{matrix}\right\}$：${}_RM_n^l\to AG'_{r,n}$ 与 $\mathrm{Hom}(M,-)$：$AG'_{r,n}\to {}_RM_n^l$ 是一对伴随函子。

$n=2$ 时，定理 4.4 为[2]中 $p.110$ 的定理 7.2。

参考文献

[1] 于永溪，左R-n模范畴与Hom函子，数学研究与评论. Vol.2, No.4, (1982).

[2] Hilton, P. J. and stammbach, U. A., Course in Homological Algebra. New-York-Heidelberg-Berlin, Springer 1971.

[3] Monk, J. D. and Sison, F. M,. On the general theory of m-groups, *Fund. Math.* 72 (1971).

[4] Zassenhauss, H. J., The Theory of Groups. ed2 New-York 1956.

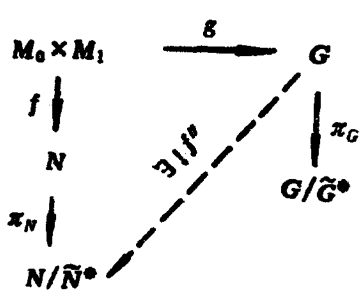
Tensor Product and Tensor Functor of the R-n modules' Category

Wang Shao-wu and Li Wei-ping

Abstract

In this paper, we define the tensor product of the R-n modules' category.

Definition 3.1 A tensor product of $M_0 \in \mathrm{ob}_R M_n^l$, $M_1 \in \mathrm{ob}_R M_n^r$ is an Abelian n-group $M/\widetilde{M}^*$ and a mapping $\pi_G \circ g$. For every bilinear mapping f and for every left R-n module N there exists an unique homomorphism f'' of Abelian n-group such that $f'' \circ g = \pi_G \circ f$, i.e, the diagram commutative: $G/\widetilde{G}^* = M_0 \otimes_n M_1$, where $\widetilde{N}^* = \{p \in N,\ p = \bar{p}\}$, π_N: $N \to N/\widetilde{N}^*$ is a cannonical mapping.



We prove the existence and uniqueness theorem of the tensor product of the R-n modules' category and the following main results:

Theorem 4.3 (Adjoint Isomorphism) $\forall\ m_0 \in \mathrm{ob}_R M_n^l$, $M \in \mathrm{ob}_R M_n^r$, $G \in \mathrm{ob} AG_n^r$, Then there is a natural isomorphism of Abelran n-group η: $\mathrm{Hom}(M_0 \otimes_n M, G) \to \mathrm{Hom}_R(M_0,\ \mathrm{Hom}(M,\ G))$.

Theorem 4.4 $\forall M \in \mathrm{ob}_R M_n^r$, then $(-\otimes_n M,\ \mathrm{Hom}(M, -))$ is an adjoint pair.

In addition, we discuss the free Abelian n-groups and show that the free n-group generated by any set may be represented by universal property.