第5卷 第1期
1985年1月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

局部环上的二维线性群的自同构*

王路群

（黑龙江大学）

关于局部环上二维线性群的自同构，虽已有些结果[3][4][5]，然而，不论2是否为单位的局部环上的统一形式，还未见有关论述。本文仅在剩余域不为 $\mathbf{F}_2$、$\mathbf{F}_3$ 与 $\mathbf{F}_5$ 的限制下，给出了自同构统一处理的形式，从而推广了有关结果。

设 R 是局部环，R^* 是其单位元素乘群，M 是其极大理想，$K=R/M$ 是 R 的剩余域。以 $a\to\bar{a}$，$\forall a\in R$，表示 R 到 K 上的自然同态。若 $\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，$\forall\sigma\in \mathrm{SL}_2(R)$，规定 $\bar{\sigma}=\begin{bmatrix}\bar{a} & \bar{b}\\ \bar{c} & \bar{d}\end{bmatrix}$；那么 $\bar{\sigma}\in\mathrm{SL}_2(K)$，且 $\sigma\to\bar{\sigma}$ 给出了 $\mathrm{SL}_2(R)$ 到 $\mathrm{SL}_2(K)$ 上的同态。σ 的阶 $o(\sigma)$ 定义为 R 中理想 $(a-d)+(b)+(c)$。

以 Λ 表示 $\mathrm{SL}_2(R)$ 的自同构；设 $P\in\mathrm{GL}_2(R)$，则 Λ_P 定义为 $\Lambda_P\sigma=P\sigma P^{-1}$，$\forall\sigma\in\mathrm{SL}_2(R)$；若 $\lambda\to\lambda'$ 是环 R 的自同构，定义 $\sigma'=\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}$，则 $\sigma'\in\mathrm{SL}_2(R)$。不难指出 Λ_P 与 $\sigma\to\sigma'$ 都给出了 $\mathrm{SL}_2(R)$ 的自同构。

本文总假设 $K\neq\mathbf{F}_2$、$\mathbf{F}_3$ 及 $\mathbf{F}_5$，易知此条件与不等式 $x^5-x\neq0$ 在 K 中有解是等价的。设此不等式的解之一为 $\bar{x}_0$，其中 $x_0\in R$。不难指出，$x_0^5-x_0\in R^*$，即 $x_0\in R^*$，$x_0^2\pm1\in R^*$。

引理1 下列命题彼此等价，其中 $\sigma\in\mathrm{SL}_2(R)$，1) $o(\sigma)=R$；2) $\bar{\sigma}\neq\pm1$；3) 存在 $P\in\mathrm{GL}_2(R)$，使得 $\Lambda_P\sigma=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & a+d\end{bmatrix}$；4) 若 G_σ 是由 σ 生成的 $\mathrm{SL}_2(R)$ 一正规子群，则 $G_\sigma=\mathrm{SL}_2(R)$；5) $o(\Lambda\sigma)=R$。

证明 1) $\Rightarrow$ 2)：由于 $(a-d)+(b)+(c)=R$，则在 $a-d$，b 与 c 中至少有一个是单位元素。若 $b\in R^*$（或 $c\in R^*$），则 $\bar{b}\neq0$（或 $\bar{c}\neq0$），从而 $\bar{\sigma}\neq\pm1$；若仅有 $a-d\in R^*$，即 $\bar{a}\neq\bar{d}$，那么 $\bar{\sigma}\neq\pm1$ 是显然的。

2) $\Rightarrow$ 3)：若 $\bar{b}\neq0$（或 $\bar{c}\neq0$），取 $\alpha=1$，$\beta=0$（或 $\alpha=0$，$\beta=1$）；若仅有 $\bar{a}-\bar{d}\neq0$，取 $\alpha=\beta=1$。令 $P=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -a\alpha-c\beta, & -b\alpha-d\beta\end{bmatrix}$，则 $P\in\mathrm{GL}_2(R)$，且 $\Lambda_P\sigma=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & a+d\end{bmatrix}$ 是不难计算的。

3) $\Rightarrow$ 4)：由于 $\begin{bmatrix}x_0^{-2}, & 0\\ (a+d(x_0^2-1), & x_0^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0^{-1} & \\ & x_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & a+d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0^{-1} & \\ & x_0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & a+d\end{bmatrix}^{-1}\in G_{\Lambda_P\sigma}$，

$$\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda(1-x_0^4)^{-1}, & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0^{-2} & \\ (a+d)(x_0^2-1), & x_0^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda(1-x_0^4)^{-1}, & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_0^{-2} & \\ (a+d)(x_0^2-1), & x_0^2\end{bmatrix}^{-1}$$

$\in G_{\Lambda_P\sigma}$，$\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\in G_{\Lambda_P\sigma}$ 及 $\Lambda_P G_\sigma=G_{\Lambda_P\sigma}$，得 $\Lambda_P G_\sigma=\mathrm{SL}_2(R)$，

*1981年12月18日收到。作者感谢东北师大张海权教授的指导。

从而 $G_\sigma=\mathrm{SL}_2(R)$。

4)⇒5)：显然$G_{\Lambda\sigma}=\Lambda G_\sigma=\mathrm{SL}_2(R)$，但$G_{\Lambda\sigma}=\left\{\prod_{i=1}^{m}\tau_i\Lambda\sigma\tau_i^{-1}/\forall m\in\mathbf{Z}^+,\ \forall\tau_i\in\mathrm{SL}_2(R)\right\}$，故至少存在 $\tau\in\mathrm{SL}_2(R)$，使得 $o(\tau\cdot\Lambda\sigma\cdot\tau^{-1})=R$；否则，由于 $o\left(\left(\prod_{i=1}^{m}\tau_i\Lambda\sigma\tau_i^{-1}\right)\subseteq o(\tau_1\Lambda\sigma\tau_1^{-1})+\cdots+o(\tau_m\Lambda\sigma\tau_m^{-1})\right.$，得 $o\left(\prod_{i=1}^{m}\tau_i\Lambda\sigma\tau_i^{-1}\right)\subseteq M$，此为矛盾。又由于$o(\tau\Lambda\sigma\tau^{-1})=o(\Lambda\sigma)$，故$o(\Lambda\sigma)=R$。

5)⇒1)：由1)⇒2)⇒3)⇒4)，得 $G_{\Lambda\sigma}=\mathrm{SL}_2(R)$。又由 4)⇒5)，得 $o(\Lambda^{-1}(\Lambda\sigma))=R$，即 $o(\sigma)=R$。证毕。

定义 $\sigma\in\mathrm{SL}_2(R)$ 称为抛物的（元素），如果存在 $\sigma_1\in\mathrm{SL}_2(R)$，使得

i）$o(\sigma)=o(\sigma_1)=o(\sigma\sigma_1)=o(\sigma\sigma_1^{-1})=R$；

ii）$\sigma\sigma_1=\sigma_1\sigma$，$\sigma\sim\sigma_1$（在 $\mathrm{SL}_2(R)$ 中相似）。

显然，σ_1 亦是抛物的，称其为 σ 的相伴元。

引理2 下列命题彼此等价：1）σ 是抛物的；2）$\Lambda\sigma$ 是抛物的；3）存在 $P\in\mathrm{GL}_2(R)$，使得 $\Lambda_P\sigma=\varepsilon\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$，其中 $\varepsilon^2=1$。

证明 1)⟺2)：由引理1是不难得到的。1)⇒3)：由引理1之3)，存在$P_1\in\mathrm{GL}_2(R)$，使得 $\Lambda_{P_1}\sigma=\begin{bmatrix}0&-1\\1&a+d\end{bmatrix}$；又由本引理之2)，$\Lambda_{P_1}\sigma_1$ 是抛物元素$\Lambda_{P_1}\sigma$ 的相伴元。因而，它俩可换。故必存在x，$y\in R$，使得$\Lambda_{P_1}\sigma_1=\begin{bmatrix}x&y\\-y,&x-(a+d)y\end{bmatrix}$。又由于它俩相似，故迹相等，得

$$2x=(a+d)(y+1)。\tag{1}$$

又由 $\det\Lambda_{P_1}\sigma_1=1$，得

$$x^2-(a+d)xy+y^2=1\tag{2}$$

若$y+1\bar{\in}R^*$，则 $\bar{y}=-\bar{1}$，代入（2），得$\bar{x}(\bar{x}+\bar{a}+\bar{d})=0$。

于是 $\bar{x}=0$ 或$\bar{x}=-\bar{a}-\bar{d}$。若 $\bar{x}=0$，$\bar{y}=-\bar{1}$，则 $\overline{\Lambda_{P_1}\sigma_1}=\begin{bmatrix}0&-\bar{1}\\\bar{1},&\bar{a}+\bar{d}\end{bmatrix}$，从而 $\overline{\Lambda_{P_1}\sigma\cdot\Lambda_{P_1}\sigma_1^{-1}}=\bar{1}$；若 $\bar{x}=-\bar{a}-\bar{d}$，$\bar{y}=-\bar{1}$，则$\overline{\Lambda_{P_1}\sigma_1}=\begin{bmatrix}-\bar{a}-\bar{d},&-\bar{1}\\\bar{1},&0\end{bmatrix}$，从而$\overline{\Lambda_{P_1}\sigma\cdot\Lambda_{P_1}\sigma_1}=-I$。因而，不论 $\bar{x}$ 为 0 或 $-\bar{a}-\bar{d}$，由引理1之2)，或者 $o(\Lambda_{P_1}\sigma\Lambda_{P_1}\sigma_1^{-1})\neq R$ 或 $o(\Lambda_{P_1}\sigma\cdot\Lambda_{P_1}\sigma_1)\neq R$，此与 $\Lambda_{P_1}\sigma$ 为抛物元素矛盾，故 $y+1\in R^*$。同理，亦可证 $y-1\in R^*$。

由此，从（1）得$a+d=2x(y+1)^{-1}$，代入（2）经整理得 $(y-1)[y+1-x^2(y+1)^{-1}]=0$。但 $y-1\in R^*$，故上式可为 $y+1-x^2(y+1)^{-1}=0$。令 $\varepsilon=x(y+1)^{-1}$。由上式可知 $\varepsilon^2=1$，且 $a+d=2\varepsilon$。于是 $\Lambda_{P_1}\sigma=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\varepsilon\end{bmatrix}$。取 $P_2=\begin{bmatrix}-1&\\&1,\varepsilon\end{bmatrix}$，则$P=P_2P_1\in\mathrm{GL}_2(R)$；且不难算出 $\Lambda_P\sigma=\varepsilon\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$。

3)⇒1)：取 $\sigma_1=\Lambda_{P^{-1}}\left(\varepsilon\begin{bmatrix}1&x_0^2\\&1\end{bmatrix}\right)$，易证 σ 是抛物的，σ_1 是它的相伴元。

定理1　设 R 是局部环，M 是它的极大理想，若 $R/M\neq \mathrm{F}_2$、F_3 及 F_5，则 $\mathrm{SL}_2(R)$ 的自同构 Λ 一定是下列形状：$\Lambda\sigma=P\sigma' P^{-1}$，其中 $P\in \mathrm{GL}_2(R)$，$\forall\sigma\in \mathrm{SL}_2(R)$。

证明　由引理2，$\Lambda\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$是抛物的，故存在 $P_1\in \mathrm{GL}_2(R)$，使得 $\Lambda_{P_1}\Lambda\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}=\varepsilon\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$，其中 $\varepsilon^2=1$。

由于$\begin{bmatrix}1&(1+x_0^2)^{-1}\\&1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&(1+x_0^2)^{-1}x_0^2\\&1\end{bmatrix}$都与$\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$交换，故存在 x_i、$y_i\in R$，$(i=1,\ 2)$使得

$$\Lambda_{P_1}\Lambda\begin{bmatrix}1&(1+x_0^2)^{-1}\\&1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1&y_1\\&1\end{bmatrix},\ \Lambda_{P_1}\Lambda\begin{bmatrix}1&(1+x_0^2)^{-1}x_0^2\\&1\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}1&y_2\\&1\end{bmatrix},\tag{3}$$

其中 $x_i^2=1$，$i=1,\ 2$。又因

$$\begin{bmatrix}1&\lambda(1+x_0^2)^{-1}\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\lambda(1+x_0^2)^{-1}x_0^2\\&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda\\&1\end{bmatrix},\ \forall\lambda\in R,\tag{4}$$

得 $x_1x_2\begin{bmatrix}1&y_1+y_2\\&1\end{bmatrix}=\varepsilon\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$，从而

$$\varepsilon=x_1x_2.\tag{5}$$

然而

$$\begin{bmatrix}x_0&\\&x_0^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\lambda(1+x_0^2)^{-1}\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0&\\&x_0^{-1}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\lambda(1+x_0^2)^{-1}x_0^2\\&1\end{bmatrix},\ \forall\lambda\in R,\tag{6}$$

故由相似阵迹相等，得 $2x_1=2x_2$。又由（3）与（5），便得 $2\varepsilon=2$。令 $P_2=\begin{bmatrix}1&-1\\\varepsilon-1&1\end{bmatrix}$，则 $P_2\in \mathrm{GL}_2(R)$，且 $\Lambda_{P_2P_1}\Lambda\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$。由于$\begin{bmatrix}1&\lambda\\&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$可换，故存在 $\varepsilon_\lambda\in R^*$，$\lambda'\in R$，使得 $\Lambda_{P_2P_1}\Lambda\begin{bmatrix}1&\lambda\\&1\end{bmatrix}=\varepsilon_\lambda\begin{bmatrix}1&\lambda'\\&1\end{bmatrix}$，其中 $\varepsilon_\lambda^2=1$，$1'=1$，$\forall\lambda\in R$。由此，从(4)可得

$$\varepsilon_{\lambda(1+x_0^2)^{-1}}\ \varepsilon_{\lambda(1+x_0^2)^{-1}x_0^2}=\varepsilon_\lambda.$$

设 $\Lambda_{P_2P_1}\Lambda\begin{bmatrix}x_0&\\&x_0^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，再由(6)，便得$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&[\lambda(1+x_0^2)^{-1}]'\\&1\end{bmatrix}=\varepsilon_\lambda\begin{bmatrix}1&[\lambda(1+x_0^2)^{-1}x_0^2]'\\&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，整理得

$$c[\lambda(1+x_0^2)^{-1}]'=(\varepsilon_\lambda-1)d,\ \forall\lambda\in R.\tag{7}$$

由引理1，易知$[(1+x_0^2)^{-1}]'\in R^*$。故令 $\lambda=1$，由于 $\varepsilon_1=1$，从（7）便得 $c=0$，于是 $ad=1$。从（7）又得 $\varepsilon_\lambda=1$，$\forall\lambda\in R$。因此，$\Lambda_{P_2P_1}\Lambda\begin{bmatrix}1&\lambda\\&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda'\\&1\end{bmatrix}$，$\forall\lambda\in R$。若设 $\Lambda_{P_2P_1}\Lambda\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&u\end{bmatrix}$，由于$\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&\lambda\\&1\end{bmatrix}$（$\forall\lambda\in R$）是 $\mathrm{SL}_2(R)$ 的生成元组，故 $z\neq0$；否则 $\overline{\Lambda_{P_2P_1}\Lambda\begin{bmatrix}1&\lambda\\&1\end{bmatrix}}$与$\overline{\Lambda_{P_2P_1}\Lambda\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}}$只能生成 $\mathrm{SL}_2(K)$ 的真子群，因而$\begin{bmatrix}1&\lambda'\\&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}x&y\\z&u\end{bmatrix}$不能生成 $\mathrm{SL}_2(R)$。就有 $z\in R^*$。又$\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}^2=-I$，易知$\begin{bmatrix}x&y\\z&u\end{bmatrix}^2\in \mathrm{RL}_2(R)$。于是

$z(x+u)=0$，即$x+u=0$。再设$P_3=\begin{bmatrix}1 & -xz^{-1}\\ & z^{-1}\end{bmatrix}$，则$P_3\in \mathbf{GL}_2(R)$。令$P=P_3P_2P_1$，那么$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}$，$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & z\\ & 1\end{bmatrix}$。由于$\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}$，两边取$\Lambda_P\Lambda$的同构象，得$\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & z\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & z\\ & 1\end{bmatrix}$。整理，得$z=1$。于是$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}$，$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda'\\ & 1\end{bmatrix}$，$\forall\lambda\in R$。又由$\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}^{-1}$得$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda' & 1\end{bmatrix}$。且不难指出$(\lambda+\mu)'=\lambda'+\mu'$，$\forall\lambda,\ \mu\in R$。

用[1]中方法，易证$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix}x & \\ & x^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x' & \\ & x'^{-1}\end{bmatrix}$，及$(xy)'=x'y'$，$\forall x,\ y\in R^*$。由于$R$中元素可表为两个单位元素之和，故对任意$\lambda,\ \mu\in R$，存在$x_i,\ y_i\in R^*$，使得$\lambda=x_1+y_1$，$\mu=x_2+y_2$。于是$(\lambda\mu)'=(x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2)'=(x_1x_2)'+(x_1y_2)'+(y_1x_2)'+(y_1y_2)'=x_1'x_2'+x_1'y_2'+x_2'y_1'+y_1'y_2'=\lambda'\mu'$。由此，不难指出$\lambda\to\lambda'$是环$R$的自同构。就有$\Lambda_P\Lambda\sigma=\sigma'$，$\forall\sigma\in \mathbf{SL}_2(R)$)。证毕。

定理2 设R是局部环，M是它的极大理想，若$R/M\neq\mathbf{F}_2$、$\mathbf{F}_3$及$\mathbf{F}_5$，则$\mathbf{GL}_2(R)$的自同构Λ一定是下列形状

$\Lambda\sigma=\chi_{\det\sigma}P\sigma'P^{-1}$，其中$\forall\sigma\in\mathbf{GL}_2(R)$，$P\in\mathbf{GL}_2(R)$，$\lambda\to\chi_\lambda$是$R^*$到自身内的乘法同态。

证明 由$\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0^2 & \\ & x_0^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda(x_0^4-1)^{-1}\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0^2 & \\ & \bar{x}_0^{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & \lambda(x_0^4-1)^{-1}\\ & 1\end{bmatrix}^{-1}$易知$\mathbf{SL}_2(R)=[\mathbf{GL}_2(R),\ \mathbf{GL}_2(R)]$，因而$\Lambda\mathbf{SL}_2(R)=\mathbf{SL}_2(R)$。故由定理1，存在$P\in\mathbf{GL}_2(R)$，使得$\Lambda_P\Lambda\sigma=\sigma'$，$\forall\sigma\in\mathbf{SL}_2(R)$。令$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix}1 & \\ & \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}$，$\forall\mu\in R^*$。由于$\begin{bmatrix}1 & \\ & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & \mu\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \lambda u^{-1}\\ & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & \\ & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & \mu\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda\mu & 1\end{bmatrix}$，则有$\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda'\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \lambda'\mu'^{-1}\\ & 1\end{bmatrix}$，及$\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda' & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \\ \lambda'\mu' & 1\end{bmatrix}$，整理得$y=z=0,u=\mu'x$，即存在$x_\mu\in R^*$，使得$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix}1 & \\ & \mu\end{bmatrix}=x_\mu\begin{bmatrix}1 & \\ & \mu'\end{bmatrix}$ $\forall\mu\in R^*$。易证$\mu\to x_\mu$是R^*到自身内的一个同态。又由$\begin{bmatrix}1 & \\ & \det\sigma\end{bmatrix}^{-1}\sigma\in\mathbf{SL}_2(R)$，得$\Lambda_P\Lambda\begin{bmatrix}1 & \\ & \det\sigma\end{bmatrix}^{-1}\cdot\Lambda_P\Lambda\sigma=\left(\begin{bmatrix}1 & \\ & \det\sigma\end{bmatrix}\sigma\right)'$，即$\Lambda_P\Lambda\sigma=\chi_{\det\sigma}\sigma'$，$\forall\sigma\in\mathbf{GL}_2(R)$。证毕。

参 考 文 献

[1] 华罗庚、万哲先，典型群，1963年，上海科技出版社.
[2] McDonald, B. R., Geometric algebra over local rings, Dekker, New York, 1976.
[3] 万哲光、任宏硕，特征2的局部环上二维线性群的自同构，数学年刊，第四卷A辑第四期，419-434.
[4] 游宏、王仁发，半局部环上的二维线性群的自同构，科学通报，1981年17期.
[5] 王路群，2是非单位的局部环上二维线性群的自同构，科学通报，1981年20期.