第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

按有理函数系展开函数成Fourier级数*

娄元仁

（北京大学）

设$\{\alpha_k\}_0^\infty$和$\{\beta_k\}_1^\infty$分别为$|z|<1$和$|z|>1$中的任意复数序列，那么有理函数系

$$\phi_n(z)=e^{-i\frac{\theta_n}{2}}\sqrt{\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}}\frac{1}{1-\bar\alpha_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar\alpha_k z}\frac{\bar\alpha_k}{|\alpha_k|},\quad n=0,1,\cdots$$

$$\phi_{-n}(z)=-e^{-i\frac{\omega_n}{2}}\sqrt{\frac{|\beta_n|^2-1}{2\pi}}\frac{1}{1-\bar\beta_n z}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{z-\beta_k}{1-\bar\beta_k z}\frac{\bar\beta_k}{|\beta_k|},\quad n=1,2,\cdots \tag{0.1}$$

其中$\theta_n=\arg\alpha_n$，$\omega_n=\arg\beta_n$[1)]，在单位圆周上构成标准正交系，即有$\int_{|z|=1}\phi_n(z)\overline{\phi_m(z)}|dz|=\delta_{nm}$。有关函数系（0.1）的研究，可以参看[1]—[5]。

设$F(z)\in L_1(|z|=1)$，则$f(x)\overset{df}{=}F(e^{ix})\in L_1(-\pi,\pi)$。作出$f(x)$关于系$\{\phi_n(e^{ix})\}_{-\infty}^{\infty}$的Fourier级数

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\phi_k(e^{ix}),\quad c_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{\phi_k(e^{it})}dt, \tag{0.2}$$

它的部分和

$$S_{n,m}(f,x)=\sum_{k=-m}^{n}c_k\phi_k(e^{ix})=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_{n,m}(t,x)dt, \tag{0.3}$$

其中核$K_{n,m}(t,x)$可以表示成（参考[2]）

$$K_{n,m}(t,x)=\sum_{k=-m}^{n}\phi_k(e^{ix})\overline{\phi_k(e^{it})}=\frac{\zeta}{2\pi(\zeta-z)}\left\{\prod_{k=1}^{m}\frac{z-\beta_k}{1-\bar\beta_k z}\frac{1-\bar\beta_k\zeta}{\zeta-\beta_k}-\right.$$

$$\left.\prod_{k=0}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar\alpha_k z}\frac{1-\bar\alpha_k\zeta}{\zeta-\alpha_k}\right\}=\frac{1}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}\sin\frac{1}{2}[\nu_n(x)-\nu_n(t)-\nu_m^*(x)+\nu_m^*(t)]\times$$

$$\exp\left\{\frac{i}{2}\left[\nu_n(x)-\nu_n(t)+\nu_m^*(x)-\nu_m^*(t)-x+t\right]\right\}, \tag{0.4}$$

这里

* 1982年3月23日收到。

1) 在（0.1）式中，规定$\prod_{k=n_1}^{n_2}\cdots=1$，（当$n_1>n_2$时）。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\nu_n(x)\overset{df}{=}\sum_{k=0}^{n}\sigma(x,\alpha_k),\qquad \nu_m^*(x)\overset{df}{=}\sum_{k=1}^{m}\sigma(x,\beta_k),\tag{0.5}$$

$$\sigma(x,\alpha)\overset{df}{=}\int_0^x\frac{1-|\alpha|^2}{1-2|\alpha|\cos(u-\theta)+|\alpha|^2}du,\ \alpha=|\alpha|e^{i\theta},\ |\alpha|\neq 1.$$

若取 $\beta_k=1/\bar{\alpha}_{k-1}$, $(k=1,2,\cdots)$, $m=n+1$, 则有

$$K_{n,n+1}(t,x)=\frac{e^{-\frac{i}{2}(x-t)}}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}\sin[\nu_n(x)-\nu_n(t)].\tag{0.6}$$

Джрбашян M. M. 在[2]中对序列$\{\alpha_k\}_0^\infty$和$\{\beta_k\}_1^\infty$在圆周$|z|=1$上没有极限点情况，研究了级数（0.2）的收敛性问题。本文将对序列在$|z|=1$上有极限点情况，探讨级数(0.2)的收敛性问题。

§1 Riemann 基本引理

首先容易证明下面引理。

引理 1 设 l 是单位圆周$|z|=1$上的闭点集，它不含有序列$\{\alpha_k\}_0^\infty$的极限点，则对一切$x\in E\overset{df}{=}\{x:\ e^{ix}\in l,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$成立估计式

$$K_1\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)\leqslant\nu_n'(x)\leqslant K_2\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|),$$

$$|\nu_n''(x)|\leqslant K_3\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|),\tag{1.1}$$

$$|\nu_n'''(x)|\leqslant K_4\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|),$$

其中 $K_i(i=1,2,3,4)$ 是不依赖于 n 与 x 的常数。

定义 1 设序列$\{\alpha_k\}_0^\infty$, $|\alpha_k|<1$ 满足：

(i)
$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty,\tag{1.2}$$

(ii) 对任意 $\delta>0$，存在可测集 $E\subset[-\pi,\pi]$，其测度 $mE>2\pi-\delta$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\left|d\frac{1}{\nu_n'(t)}\right|=0,\tag{1.3}$$

则称序列$\{\alpha_k\}_0^\infty$满足条件（C）。如果序列$\left\{\frac{1}{\beta_k}\right\}_1^\infty$满足条件（C），那么也称序列$\{\beta_k\}_1^\infty$, $|\beta_k|>1$ 满足条件（C）。

引理 2 （Riemann 基本引理）。设序列$\{\alpha_k\}_0^\infty$, $|\alpha_k|<1$ 满足条件（C），函数 $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$，则对任何 a，$b(-\pi\leqslant a<b\leqslant\pi)$ 一致成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)e^{\pm i\nu_n(t)}dt=0.\tag{1.4}$$

证 我们仅对式中取“+”号情况引进证明。因为 $f(t)\in L_1(-\pi,\pi)$，所以对任给$\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切可测集 $D\subset[-\pi,\pi]$，当 $mD<\delta$ 时有

$$\int_D|f(t)||dt|<\frac{\varepsilon}{4}\tag{1.5}$$

同时存在三角多项式 $Q(t)$ 使得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-Q(t)|dt<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.6}$$

其次对取定的$\delta>0$，存在可测集$E\subset[-\pi,\pi]$，$mE>2\pi-\delta$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\left|d\frac{1}{\nu_n'(t)}\right|=0. \tag{1.7}$$

令$e\overset{df}{=}[-\pi,\pi]\setminus E$。为了简单起见，不妨设$E$是开集，于是$E\cap(a,b)$是开集，它可表示为可数个两两不相交的开区间之和，即

$$E\cap(a,b)=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\quad E_i=(t_i',t_i''),\quad t_i'\leqslant t_i''.\ ^{1)}$$

这时，由于$\sum_{i=1}^{\infty}mE_i\leqslant b-a$，因此存在$N_1$，使得$\sum_{N_1+1}^{\infty}mE_i<\delta$。记$E'=\bigcup_{i=1}^{N_1}E_i$，$E''=\bigcup_{i=N_1+1}^{\infty}E_i$。

我们有

$$\int_a^b f(t)e^{i\nu_n(t)}dt=\int_{E'}[f(t)-Q(t)]e^{i\nu_n(t)}dt+\int_{E'}Q(t)e^{i\nu_n(t)}dt+\left[\int_{E''}+\int_{e\cap(a,b)}\right]f(t)e^{i\nu_n(t)}dt=I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{1.8}$$

因为$mE''<\delta$，$m\{e\cap(a,b)\}<\delta$，所以由（1.5）和（1.6）有

$$\left|I_1+I_3+I_4\right|<\frac{3}{4}\varepsilon, \tag{1.9}$$

对于I_2，利用分部积分法得到

$$I_2=\int_{E'}Q(t)e^{i\nu_n(t)}dt=\int_{E'}\frac{Q(t)}{i\nu_n'(t)}de^{i\nu_n(t)}=\sum_{j=1}^{N_1}\left.\frac{Q(t)e^{i\nu_n(t)}}{i\nu_n'(t)}\right|_{t_j'}^{t_j''}$$

$$-\int_{E'}\frac{e^{i\nu_n(t)}Q'(t)}{i\nu_n'(t)}dt+\int_{E'}e^{i\nu_n(t)}Q(t)\frac{\nu_n''(t)}{i[\nu_n'(t)]^2}dt.$$

令$M_\varphi\overset{df}{=}\max\limits_{[-\pi,\pi]}|\varphi(t)|$，利用引理1得到

$$|I_2|\leqslant\frac{2N_1M_Q}{K_1\sum_0^n(1-|a_k|)}+\frac{2\pi M_{Q'}}{K_1\sum_0^n(1-|a_k|)}+M_Q\int_{E'}\left|d\frac{1}{\nu_n'(t)}\right|, \tag{1.10}$$

由于$\{a_k\}_0^\infty$满足条件（C），所以存在N_2，当$n>N_2$时就有$|I_2|<\frac{\varepsilon}{4}$。由此从(1.8)，(1.9)得到（1.4）。

推论　在引理2条件下，对任何$x\in[-\pi,\pi]$和$a,b\in[-\pi,\pi]$一致成立

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)e^{\pm i[\nu_n(t)-\nu_n(x)]}dt=0,\\&\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin[\nu_n(t)-\nu_n(x)]dx=0,\\&\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos[\nu_n(t)-\nu_n(x)]dx=0,\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

1）当$t_i'=t_i''$时，认为$E_i=\phi$(空集)。因此表示式包含了有限个开区间之和这一情况。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

引理 3 在引理2条件下，若$\psi(t)$在$[-\pi,\pi]$上有有界变差，则对$x\in[-\pi,\pi]$和$a,b\in[-\pi,\pi]$一致有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x\pm t)\psi(t)e^{\pm i\nu_n(x\pm t)}dt=0. \tag{1.12}$$

利用第二积分中值公式和引理2便可得出引理3。

引理 4 设序列$\{a_k\}_0^\infty$，$|a_k|<1$，满足$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|a_k|)=+\infty$，并且它在$|z|=1$上的极限点集合$P$的（线）测度为零$mP=0$，则序列$\{a_k\}_0^\infty$满足条件（$C$）。

证 记$S\overset{df}{=}\{x:\ e^{ix}\in P,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$，显然$mS=0$，因此对任何$\delta>0$，存在开集$e\supset S$，且$me<\delta$。取$E=[-\pi,\pi]\setminus e$，易见$E\subset[-\pi,\pi]$是可测的，且$mE>2\pi-\delta$，此外由于$|z|=1$上对应于$E$的点集$l\overset{df}{=}\{z:\ z=e^{ix},\ x\in E\}$不含序列$\{a_k\}_0^\infty$的极限点，且$l$为闭集，根据引理1有

$$\int_E\left|d\frac{1}{\nu_n'(t)}\right|=\int_E\left|\frac{\nu_n''(t)}{[\nu_n'(t)]^2}\right|dt\leqslant\frac{2K_3\pi}{K_1^2\sum_{k=0}^{n}(1-|a_k|)}\longrightarrow 0,$$

即（1.3）式成立，所以$\{a_k\}_0^\infty$满足条件（C）。

今后假设$\{a_k\}_0^\infty$，$|a_k|<1$及$\{\beta_k\}_1^\infty$，$|\beta_k|>1$满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|a_k|)=+\infty,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{|\beta_k|}\right)=+\infty, \tag{1.13}$$

众所周知，这是函数系（0.1）在$L_p(|z|=1)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$中完备的充要条件（参考[6]）。为了简化问题，假设$\beta_k=1/\bar{a}_{k-1}(k=1,2,\cdots)$，取$m=n+1$，这时

$$S_{n,n+1}(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_{n,n+1}(x+t,x)dt=\int_0^{\pi}f(x+t)K_{n,n+1}(x+t,x)dt$$
$$+\int_0^{\pi}f(x-t)K_{n,n+1}(x-t,x)dt,$$

其中$K_{n,n+1}(t,x)$由（0.6）式确定。

引进记号

$$K_{n,n+1}^{(\pm)}(t,x)\overset{df}{=}\frac{1}{2}\Big[K_{n,n+1}(x+t,x)\pm K_{n,n+1}(x-t,x)\Big]. \tag{1.14}$$

于是有

$$S_{n,n+1}(f,x)=\int_0^{\pi}\Big[f(x+t)+f(x-t)\Big]K_{n,n+1}^{(+)}(t,x)dt$$
$$+\int_0^{\pi}\Big[f(x+t)-f(x-t)\Big]K_{n,n+1}^{(-)}(t,x)dt. \tag{1.15}$$

引理 5 设序列$\{a_k\}_0^\infty$，$|a_k|<1$满足条件（C），则对任意$h>0$，关于$x\in[-\pi,\pi]$一致成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^h K_{n,n+1}^{(+)}(t,\ x)dt=\frac{1}{2}. \tag{1.16}$$

证 由恒等式

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\frac{1}{e^{ix}-a_0}=\int_0^\pi\left[\frac{1}{e^{i(x+t)}-a_0}+\frac{1}{e^{i(x-t)}-a_0}\right]K_{n,n+1}^{(+)}(t,x)dt+\int_0^\pi\left[\frac{1}{e^{i(x+t)}-a_0}-\frac{1}{e^{i(x-t)}-a_0}\right]K_{n,n+1}^{(-)}(t,x)dt,$$

利用引理3，得出对任何 $x\in[-\pi,\pi]$ 一致成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\left[\frac{e^{ix}-a_0}{e^{i(x+t)}-a_0}+\frac{e^{ix}-a_0}{e^{i(x-t)}-a_0}\right]K_{n,n+1}^{(+)}(t,x)dt=1. \tag{1.17}$$

此外根据引理3，对任何 $x\in[-\pi,\pi]$ 一致成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\left[2-\frac{e^{ix}-a_0}{e^{i(x+t)}-a_0}-\frac{e^{ix}-a_0}{e^{i(x-t)}-a_0}\right]K_{n,n+1}^{(+)}(t,x)dt=0. \tag{1.18}$$

由（1.17）和（1.18）及引理3，立即得出（1.16）。

引理6　设序列 $\{a_k\}_0^\infty$，$|a_k|<1$ 满足条件（C），l 为 $|z|=1$ 上任何闭点集，它不含有 $\{a_k\}_0^\infty$ 的极限点。则对任何 $h>0$ 关于 $x\in E\overset{df}{=}\{x;\ e^{ix}\in l,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$ 一致成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^h K_{n,n+1}^{(-)}(t,x)dt=0. \tag{1.19}$$

证　在定理条件下，存在 $\delta(0<\delta<h)$，使得对一切 $x\in E$，在圆弧 $\Delta_x\overset{df}{=}\{z;\ z=e^{i(x+t)},\ |t|\leqslant\delta\}$ 上没有 $\{a_k\}_0^\infty$ 的极限点。根据引理2有

$$2\int_\delta^h K_{n,n+1}^{(-)}(t,x)dt=\int_0^\delta K_{n,n+1}(x+t,x)dt-\int_0^\delta K_{n,n+1}(x-t,x)dt+o(1)=I_1-I_2+o(1) \tag{1.20}$$

对于 I_1，根据（0.6）和引理2，我们有

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{\sin[\nu_n(x+t)-\nu_n(x)]}{t}dt+o(1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{\sin[\nu_n(x+t)-\nu_n(x)]}{\nu_n(x+t)-\nu_n(x)}\times$$

$$d[\nu_n(x+t)-\nu_n(x)]-\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\sin[\nu_n(x+t)-\nu_n(x)]d\ln\frac{\nu_n(x+t)-\nu_n(x)}{t}+o(1)$$

$$=I_3-I_4+o(1).$$

容易指出 $\lim\limits_{n\to\infty}I_3=\frac{1}{2}$，此外利用引理1和条件(C)，可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}I_4=0$，因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}I_1=\frac{1}{2}$。同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}I_2=\frac{1}{2}$。于是立即得出（1.19）。

§3　Fourier级数的收敛性

定理1　假设1）序列 $\{a_k\}_0^\infty$，$|a_k|<1$ 满足条件（C）；2）函数 $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$ 在 x_0 处存在单侧极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$，并且对某个 $h>0$ 存在积分

$$\int_0^h\frac{|\varphi_+(t)|}{t}dt,\qquad\int_0^h\frac{|\varphi_-(t)|}{t}dt, \tag{2.1}$$

$$\varphi_\pm(t)\overset{df}{=}f(x_0\pm t)-f(x_0\pm 0);$$

3）若 e^{ix_0} 是 $\{a_k\}_0^\infty$ 的极限点，则补充条件

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta K^{(-)}_{n,n+1}(t,x_0)dt=0,\quad (\delta>0). \tag{2.2}$$

那么成立

$$\lim_{n\to\infty}S_{n,n+1}(f,x_0)=\frac{1}{2}\Big[f(x_0+0)+f(x_0-0)\Big]. \tag{2.3}$$

证 根据 (1.15), (1.16) 和 (1.19)(或(2.2)), 有

$$S_{n,n+1}(f,x_0)-\frac{1}{2}\Big[f(x_0+0)+f(x_0-0)\Big]=\int_0^\pi\Big[\varphi_+(t)+\varphi_-(t)\Big]K^{(+)}_{n,n+1}(t,x_0)dt$$

$$+\int_0^\pi\Big[\varphi_+(t)-\varphi_-(t)\Big]K^{(-)}_{n,n+1}(t,x_0)dt+o(1)=I_1+I_2+o(1), \tag{2.4}$$

由于条件 (2.1), 函数$[\varphi_+(t)\pm\varphi_-(t)]/\sin\frac{t}{2}$在$[0,\pi]$上可积, 根据引理 2 有$\lim\limits_{n\to\infty}I_1=\lim\limits_{n\to\infty}I_2=0$.

注 如果$f(x)$在x_0处连续, 则不加补充条件 (2.2), 定理结论仍成立。

定理 2 假设 1) 序列$\{a_k\}_0^\infty$, $|a_k|<1$满足条件 (C); 2) 函数$f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$在x_0的某邻域(x_0-h,x_0+h)上有有界变差; 3) 若e^{ix_0}为$\{a_k\}_0^\infty$的极限点, 则补充条件 (2.2)。那么成立

$$\lim_{n\to\infty}S_{n,n+1}(f,x_0)=\frac{1}{2}\Big[f(x_0+0)+f(x_0-0)\Big].$$

证 从 (2.4) 式出发, 为了估计I_1, 令

$$I_1=\left(\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\right)\Big[\varphi_+(t)+\varphi_-(t)\Big]K^{(+)}_{n,n+1}(t,x_0)dt,\quad 0<\delta<h,$$

根据引理 5 及$\varphi_\pm(t)$的有界变差性质和在$t=0$处的连续性, 利用第二积分中值公式可以指出当取$\delta>0$充分小, 则积分$\int_0^\delta$可以任意小; 又对取定的δ, 根据引理 2 有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_\delta^\pi=0$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}I_1=0$。同理可证$\lim\limits_{n\to\infty}I_2=0$。

定理 3 假设 1) 序列$\{a_k\}_0^\infty$, $|a_k|<1$满足条件 (C); 2) 函数$f(x)\in C_{2\pi}$且存在$h>0$使得积分

$$\int_0^h\frac{|f(x\pm t)-f(x)|}{t}dt \tag{2.5}$$

关于x一致收敛。则$f(x)$的 Fourier 级数一致收敛于$f(x)$。

推论 设序列$\{a_k\}_0^\infty$, $|a_k|<1$满足条件 (C); 函数$f(x)\in C_{2\pi}$的连续模满足

$$\int_0^h\frac{\omega(f,\delta)}{\delta}d\delta<\infty, \tag{2.6}$$

则$f(x)$的 Fourier 级数一致收敛于$f(x)$。

定理 4 假设 1) 序列$\{a_k\}_0^\infty$, $|a_k|<1$满足条件 (C); 2) 函数$f(x)\in C_{2\pi}$在$[-\pi,\pi]$上有有界变差; 3) 在包含有$S\overset{df}{=}\{x:\ e^{ix}\in P,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$的某个开集$e$上 (关于$x$) 一致地有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\left|\int_0^{\pi} K^{(-)}_{n,n+1}(t,x)\,dt\right| \leqslant M, \tag{2.7}$$

其中P是$\{a_k\}_0^\infty$在$|z|=1$上的极限点全体，$M>0$是常数，那么$f(x)$的Fourier级数一致收敛于$f(x)$。

这两个定理的证明只要利用等式

$$S_{n,n+1}(f,x)-f(x)=\int_0^{\pi}[\varphi_+(t)+\varphi_-(t)]K^{(+)}_{n,n+1}(t,x)\,dt$$
$$+\int_0^{\pi}[\varphi_+(t)-\varphi_-(t)]K^{(-)}_{n,n+1}(t,x)\,dt+f(x)\left[2\int_0^{\pi}K^{(+)}_{n,n+1}(t,x)\,dt-1\right]$$

和引理3及5，用类似于前面的方法得出。

沈燮昌教授对本文提出了许多宝贵意见，作者表示衷心感谢。

参　考　文　献

[1] Walsh J. L., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. 1960.

[2] Джрбашян М. М., К теории рядов Фурье по рациональным функциям, *Изв. АН Арм. ССР, Серия Ф-М.*, №7, 1956, 3—27.

[3] Джрбашян М. М., Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, *Изв., АН Арм. ССР*, 2, № 1, 1967, 3—51.

[4] Китбалян А. А., Разложения по обобщенным тригонометрическим системам, *Изв. АН Арм. ССР*, 16, №6, 1963, 3—24.

[5] Лукацкий А. М., Разложения в ряды по системе рациональных функций, *Матем. сб.*, Т.90 (132): 4, 1973, 544—557.

[6] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации, ГрФМЛ, Москва. 1965.

On the Expansion of Functions in Fourier Series with Respect to an Orthogonal System of Rational Functions

Lou Yuan-ren

(Peking University)

Abstract

In this paper we give some orthogonal system of rational functions on the unit circumference; We obtained the Riemann Lemma and some tests of convergence of Fourier series for this orthogonal system with the poles $\{a_k\}_0^\infty$ satisfying some conditions. The conditions we obtained are weaker than those established in [2].

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.