第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

具有可单位分解性质的谱容量*

王声望　　刘光裕
(南京大学)　(空军气象学院)

本文的目的有二，一是讨论无界可单位分解与具有可单位分解性质的谱容量间的关系，由于[1]用了一个简便的方法将E. Albrecht 定理(参看[2])推广于无界的情形，使得上述关系变得比较明显，而且对所讨论的算子，除了闭性外，无需添加其它条件。本文另一个目的是对有界情形，证明可单位分解算子与[3]中引进的可分解乘法算子等价，虽然如此，可单位分解的提法仍然是可取的，这可以从[4]以及今后的工作中看出。

设X为 Banach 空间，$C(X)$ 表定义在X中的闭算子的全体，$B(X)$ 表定义在X上有界线性算子的全体。

定义1　设$T\in C(X)$，$n\geqslant 2$为正整数，称T为具有n-单位谱分解性质（n-可单位分解）如果对$\sigma(T)$的任何开复盖$\{G_i\}_{i=1}^n$，其中G_1为∞点的邻域，下列事实成立：

(i) 存在T的不变子空间族（谱极大子空间族）[1]$\{X_i\}_{i=1}^n$，使

$$\sigma(T|X_i)\subset\overline{G}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

当G_i $(i=2,\cdots,n)$ 相对紧时，$X_i\subset D_T$；

(ii) 存在与T可换[2]的算子P_i $(i=1,2,\cdots n)$，使

$$I=\sum_{i=1}^n P_i\quad \mathcal{R}(P_i)\subset X_i\quad(i=1,2,\cdots n).$$

这里D_T记T的定义域，$\mathcal{R}(P_i)$记算子P_i的值域。

下面定理2中的(i)，在[1]中已就更广的情形给出了证明，但为了完整起见，同时为了证定理5，我们将证明扼要写出。

定理2　(i) 设T具有2-单位谱分解性质，则对任何闭集F，$X_T(F)$闭，因而为T的谱极大子空间；

(ii) 具有n-单位谱分解性质的算子T是n-可单位分解的充分必要条件是$X_T(\phi)=\{0\}$。

证　在[5]中，证明了具有2-谱分解性质的算子必具有单值延拓性质，因此对复平面的任何子集E，可定义$X_T(E)$，今设F为任一闭集，令G_F为满足下列条件的开集G的全

*1982年4月2日收到。

1) X的闭子空间Y称为T的不变子空间，若$T(Y\cap D_T)\subset Y$，Y称为T的谱极大子空间，若对T的任何不变子空间Z，由$\sigma(T|Z)\subset\sigma(T|Y)$可导出$Z\subset Y$。

2) 我们称有界线性算子S与T可换，如对任何$x\in D_T$，有$Sx\in D_T$，且$TSx=STx$。

体：

$$G=\left\{\lambda;|\lambda-\mu|>\frac{r}{2},\ \mu\notin F,\ r=\text{dist}(\mu,F)\right\}. \qquad (1)$$

任意取定$\mu\notin F$，令$G_1=G$为由(1)定义的开集。再令

$$G_2=\left\{\lambda;|\lambda-\mu|<\frac{2}{3}r\right\},$$

则$\{G_1,G_2\}$是$\sigma(T)$的开复盖，由假设，存在T的不变子空间X_i，以及与T可换的算子P_i，使

$$\sigma(T|X_i)\subset\bar{G}_i\ (i=1,2);\ I=P_1+P_2;\ \mathscr{R}(P)\subset X_i\ (i=1,2)$$

(因G_2相对紧，故$X_2\subset D_T$)，由此易看出

$$X=X_1+X_2. \qquad (2)$$

任取$x\in X_T(F)$，则$x=x_1+x_2$，$x_i\in X_i$ $(i=1,2)$，令$\Gamma=\left\{\lambda;|\lambda-\mu|=\frac{3}{4}r\right\}$，并取逆时针方向为$\Gamma$的正向，于是：

$$x_2=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda,T|X_2)x_2d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x_2(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x(\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x_1(\lambda)d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x_1(\lambda)d\lambda.$$

故

$$x=x_1-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x_1(\lambda)d\lambda. \qquad (3)$$

对任一$\lambda_0\in\Gamma$，存在λ_0的充分小邻域δ，使

$$x_1(\lambda)=y_1(\lambda)+y_2(\lambda);\ y_i(\lambda)\in X_i\cap D_T\ (i\in\delta,\ i=1,2).$$

可设$\delta\cap\bar{G}_2=\varnothing$，由

$$h(\lambda)=x_1-(\lambda-T)y_1(\lambda)=(\lambda-T)y_2(\lambda)\in X_1\cap X_2 \qquad (4)$$

以及G_2是一圆盘，容易证明$\sigma(T|X_1\cap X_2)\subset\bar{G}_2$，由$T$的单值延拓性以及(4)，可证$y_2(\lambda)=(\lambda-T|X_1\cap X_2)^{-1}h(\lambda)\in X_1\cap X_2\subset X_1$，于是$x_1(\lambda)\in X_1(\lambda\in\delta)$，因$\lambda_0\in\Gamma$是任意的，故对一切$\lambda\in\Gamma$，有$x_1(\lambda)\in X_1$。由(3) $x\in X_1$，故$X_T(F)\subset X_1$。将X_1改记为$X_{G_1}=X_G$，(注意$G_1=G$)，得着

$$X_T(F)\subset\bigcap_{G\in\underline{G}_F}X_G. \qquad (5)$$

(5)中相反的包含关系是显然的。故

$$X_T(F)=\bigcap_{G\in\underline{G}_F}X_G. \qquad (6)$$

因而$X_T(F)$闭。$X_T(F)$为T的谱极大子空间的证明与有界情形相同，从略。(i)证毕。

(ii) 必要性。设T具有n-单位谱分解性质。[1]中证明了对任何紧集K

$$X_T(K)=X_T^{(0)}(K)\oplus X_T(\varnothing)$$

其中$X_T^{(0)}(K)\subset D_T$为T的不变子空间（实际上具有更多的性质），$\sigma(T|X_T^{(0)}(K))=\sigma(T|X_T(k))$.由假设$X_T(\varnothing)=\{0\}$，故$X_T(K)=X_T^{(0)}(K)\subset D_T$，特别，当定义1($i$)中的$G_i(i=2,\cdots,n)$为相对紧开集时，有$X_T(\bar{G}_i)\subset D_T$，我们可以取所有$X_i=X_T(\bar{G}_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 于是T为

n-可单位分解的。

充分性。只需证明 $X_T(\varnothing)=\{0\}$，任意取定一个非空相对紧开集 G，由定义1(i)中的谱分解，可作出一个与 G 对应的，T 的谱极大子空间 Y，使 $\sigma(T|Y)\subset\bar{G}$，$Y\subset D_T$，因 $\sigma(T|X_T(\varnothing))=\varnothing$，故 $X_T(\varnothing)\subset Y$，于是 $X_T(\varnothing)\subset D_T$，从而 $T|X_T(\phi)$ 为有界算子。但 $\sigma(T|X_T(\varnothing))=\varnothing$，因此 $X_T(\varnothing)=\{0\}$，定理证毕。

现在着手讨论 n-可单位分解算子与具有 n-可单位分解性质的谱容量间的关系。

定义3 用 $\mathscr{F}$ 表复平面中闭子集全体，$S(X)$ 表 X 的闭子空间全体，$n\geqslant 2$，映射 $\mathscr{E}$：$\mathscr{F}\to S(X)$ 称为具有 n-可单位分解性质的谱容量，如 $\mathscr{E}$ 满足下列条件：

(i) $\mathscr{E}(\varnothing)=\{0\}$；$\mathscr{E}(\mathbf{C})=X$，$\mathbf{C}$ 表复平面；

(ii) 对任何闭集列 $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\mathscr{E}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k\right)=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}(F_k)$；

(iii) 对 $\mathbf{C}$ 的任何开复盖 $\{G_i\}_{i=1}^{n}$，其中 G_1 为 ∞ 点的邻域，存在有界线性算子 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 使

$$I=\sum_{i=1}^{n}P_i;\quad \mathscr{R}(P_i)\subset\mathscr{E}(\bar{G}_i)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

设 $T\in C(X)$，T 称为具有 n-可单位分解性质的谱容量，如果有满足 (i)—(iii) 的 $\mathscr{E}$，使得

(iv) 对任何闭集 F，$\mathscr{E}(F)$ 为 T 的不变子空间，$\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subset F$；对任何紧集 K，$\mathscr{E}(K)\subset D_T$；(iii) 中所有 P_i 与 T 可换。

命题4 设 $\mathscr{E}$ 是具有 n-可单位分解性质的谱容量。如果可以作出满足 (iii) 中诸条件的 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 使得对任何闭集 F，$\mathscr{E}(F)$ 为 $P_i(i=1,2,\cdots n)$ 的不变子空间，则 $\mathscr{E}$ 具有 $(n+1)$-可单位分解性质。

证 设 $\{G_i\}_{i=1}^{n+1}$ 为 $\mathbf{C}$ 的复盖，G_1 为 ∞ 点的邻域，$G_i(i=2,\cdots,n+1)$ 为相对紧开集。作 ∞ 点的邻域 H_1 以及相对紧开集 H_2，使

$$\bar{H}_1\subset G_1,\quad \bar{H}_2\subset\bigcup_{i=2}^{n+1}G_i,\quad \bar{H}_1\cap\bar{H}_2=\varnothing,\quad G_1\cup H_2=\mathbf{C},$$

$$H_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_{n+1}=\mathbf{C}.$$

因 $\mathscr{E}$ 具有 n-可单位分解性质，故具有2-可单位分解性质。由 $G_1\cup H_2=\mathbf{C}$，存在有界线性算子 P，Q，使

$$I=P+Q,\quad \mathscr{R}(P)\subset\mathscr{E}(\bar{G}_1),\quad \mathscr{R}(Q)\subset\mathscr{E}(\bar{H}_2),\tag{7}$$

由 $(H_1\cup G_2)\cup(H_1\cup G_3)\cup\cdots\cup(H_1\cup G_{n+1})=\mathbf{C}$，存在有界线性算子 Q_i $(i=2,\cdots,n+1)$，使

$$I=Q_2+\cdots+Q_{n+1},\quad \mathscr{R}(Q_i)\subset\mathscr{E}(\overline{H_1\cup G_i})\quad(i=2,\cdots n+1),\tag{8}$$

由假定，可设以上出现的诸空间 $\mathscr{E}(\bar{G}_i)$，$\mathscr{E}(\bar{H}_2)$，$\mathscr{E}(\overline{H_1\cup G_i})$ $(i=2,\cdots,n+1)$ 均为 P，Q，Q_i $(i=2,\cdots,n+1)$ 的不变子空间。令 $P_1=P$，$P_i=QQ_i$ $(i=2,\cdots,n+1)$ 则

$$\mathscr{R}(P_1)=\mathscr{R}(P)\subset\mathscr{E}(\bar{G}_1);\tag{9}$$

$$\mathscr{R}(P_i)=\mathscr{R}(QQ_i)\subset\mathscr{E}(\bar{H}_2)\cap\mathscr{E}(\overline{H_1\cup G_i})\subset\mathscr{E}(\bar{G}_i)\quad(i=2,\cdots,n+1).\tag{10}$$

由(7)，(8)

$$I=P+Q=P_1+Q(Q_2+\cdots+Q_{n+1})=P_1+P_2+\cdots+P_{n+1} \tag{11}$$

(9)，(10)，(11) 表明$\mathscr{E}$具有 $(n+1)$-可单位分解性质。命题证毕。

定理 5 $T\in C(X)$为n-可单位分解算子的充分必要条件是T有n-可单位分解性质的谱容量，而且此种谱容量是唯一的。

证 充分性。设T有n-可单位分解性质的谱容量$\mathscr{E}$，由定义 3 (iii)，(iv)

$X=\sum_{i=1}^{n}\mathscr{E}(\bar{G}_i)$，$\mathscr{E}(\bar{G}_i)\subset D_T$，(当$G_i$相对紧时$i=2,\cdots n$) 因此$T$具有$n$-谱分解性质，且(6)中的$X_G$可以换成$\mathscr{E}(\bar{G})$，于是

$$X_T(F)=\bigcap_{G\in\underline{G}_F}\mathscr{E}(\bar{G})\ (F\text{为闭集})。$$

由定义 3 (ii)，易证

$$\mathscr{E}(F)=\bigcap_{G\in\underline{G}_F}\mathscr{E}(\bar{G})。$$

故
$$\mathscr{E}(F)=X_T(F)。\tag{12}$$

因此$\mathscr{E}(F)$为T的谱极大子空间。这表明，由定义 3 (iii)，(iv)可导出定义 1 (ii)及(i)中的括号部份，故T为n-可单位分解算子。

必要性。显然，只要令$\mathscr{E}(F)=X_T(F)$ (F为闭集)，便知$\mathscr{E}$满足定义 3 中的全部性质。$\mathscr{E}$的唯一性也是显然的。定理证毕。

推论 n-可单位分解算子T必为 $(n+1)$-可单位分解，因此我们可称T为可单位分解算子。

证 设T为n-可单位分解算子，由定义 3 (iv)，所有的算子P_i与T可换，于是对任何闭集F，$\mathscr{E}(F)(=X_T(F))$是T的谱极大子空间，故必为T的超不变子空间（证法与有界情形类似），特别地为所有P_i的不变子空间，由命题 4 及定理 5，推论成立。

对有n-单位谱分解性质的算子，也有与定理 5 及其推论相似的结果，这只要将定义 3 中的谱容量概念稍作修改即可，由于无本质的差别，故从略。

设$\mathbf{A}\subset B(X)$为包含X上恒同算子I的一致闭子代数，$\mathbf{A}'$记$B(X)$中与$\mathbf{A}$可换的算子的全体（即与$\mathbf{A}$中的每个算子可换），如$T\in B(X)$，以$\tilde{T}$记由T定义的$\mathbf{A}$上的乘法算子：$\tilde{T}S=TS$，$(S\in\mathbf{A})$，C. Apostol[3]引进了如下定义：

若$T\in\mathbf{A}\cap\mathbf{A}'$并由$T$定义的$\tilde{T}$作为$\mathbf{A}$上的乘法算子是可分解算子，则称$T$为可分解乘法算子。这样的算子全体记成$\mathbf{A}^d=\{T\in\mathbf{A}\cap\mathbf{A}',\ \tilde{T}\text{为可分解算子}\}$。

定理 6 设$T\in B(X)$，则T为可单位分解算子的充分必要条件是T为某个一致闭子代数$\mathbf{A}$上的可分解乘法算子。

证 必要性。设$\boldsymbol{P}=\{P_a\}$为满足定义 1 (ii)中所有条件的算子P_i的全体。以$\mathbf{A}$记由$\{T,I,\boldsymbol{P}\}$生成的$B(X)$的一致闭子代数，则$T\in\mathbf{A}\cap\mathbf{A}'$。现设$Z_1$，$Z_2$为$T$的两个谱极大子空间，$\sigma(T|Z_i)=F_i$ $(i=1,2)$，$F_1\cap F_2=\varnothing$，作$\sigma(T)$的开复盖$\{G_i\}_{i=1}^{2}$，使$G_i\supset F_i$ $(i=1,2)$，$\bar{G}_1\cap F_2=\varnothing$，$\bar{G}_2\cap F_1=\varnothing$，则有$T$的谱极大子空间$X_i$，以及与$T$可换的算子$P_i\in\boldsymbol{P}\subset\mathbf{A}$，使

$$I=P_1+P_2,\quad \mathscr{R}(P_i)\subset X_i,\quad \sigma(T|X_i)\subset G_i\ (i=1,2),$$

于是

$$P_1Z_2 \subset X_1 \cap Z_2 \subset X_T(\overline{G}_1) \cap X_T(F_2) = \{0\};$$

$$P_2Z_1 \subset X_2 \cap Z_1 \subset X_T(\overline{G}_2) \cap X_T(F_1) = \{0\}.$$

故$\mathbf{A}$对T是正规的(参看[3]定义2.7)，由[3]定理2.10，$T \in \mathbf{A}^d$。

充分性。设$T \in \mathbf{A}^d$，由[3]定理2.4，T为X上的可分解算子，$\sigma(T) = \sigma(\hat{T})$。作$\sigma(T)$的复盖$\{G_i\}_{i=1}^2$，取闭集$F_i \subset G_i$ $(i=1,2)$，使$\{F_i^0\}_{i=1}^2$仍为$\sigma(T)$的复盖，这里F_i^0表F_i的内域。令$X_i = X_T(F_i)$则$\sigma(T|X_i) \subset G_i$ $(i=1,2)$，并对$\hat{T}$而言，$I \in \mathbf{A}$有分解$I = P_1 + P_2$，$P_i \in \mathbf{A}$，$\sigma_{\hat{T}}(P_i) \subset F_i (i=1,2)$，由[3]引理2.6，$P_iX \subset X_T(\sigma_{\hat{T}}(P_i)) \subset X_T(F_i) = X_i$ $(i=1,2)$。因此T为可单位分解的。定理证毕。

本文是[6]的部分结果的证明，并有所改进。

参　考　文　献

[1] Wang Shengwang and I Erdelyi, Spectral decomposable of unbounded operators (to appear).

[2] E. Albrecht, On decomposable operators, *Integral Equations and Operator* 2(1979), 1—10.

[3] C. Apostol, Decomposable multiplication operators, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 17 (1972), 323—333.

[4] 王声望，局部预解式与可单位分解算子(摘要)，科学通报(英文版) 26 (1981), 1502—1503.

[5] I. Erdelyi, Acta. Sci. Math. 42 (1980), 67—70.

[6] 王声望、刘光裕，具有可单位分解性质的谱容量(摘要)，科学通报 26 (1981), 367—368.

[7] 张奠宙、王漱石，无界可单位分解算子，华东师范大学学报(1981).

Spectral Capacities with the Property Decomposable Concerning Identity

Wang Shengwang　*Liu Guangyu*

(Nanjing University)

Abstract

Let $\mathscr{E}$ be a mapping from the set of all closed subsets of complex plane $\mathbf{C}$ into the family consisting of all subspaces of Banach space X such that

(i) $\mathscr{E}(\varnothing) = \{0\}$, $\mathscr{E}(\mathbf{C}) = X$;

(ii) For any sequence $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ of closed sets, $\mathscr{E}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}(F_i)$;

(iii) For any open covering $\{G_i\}_{i=1}^n$ of C, in which G_1 is a neighborhood of ∞, there are bounded linear operators $P_i(i=1,\cdots,n)$ such that $I=\sum_{i=1}^n P_i$ and the rang of P_i is contained in $\mathscr{E}(\overline{G}_i)$ $(i=1,\cdots,n)$. Then we call $\mathscr{E}$ a spectral capacity with the property decomposable concerning identity (denote $\mathscr{E}$ with P. D. I.)

Let T be a closed operator on X, we say that T has a spectral capacity $\mathscr{E}$ with P. D. I., if there a $\mathscr{E}$ satisfying (i)—(iii) and

(iv) For and closey set F, $\mathscr{E}(F)$ is a invariant subspace of T, $\sigma(T|\mathscr{E}(F))\subset F$. If K is a compact set, $\mathscr{E}(K)\subset D_T$. All P_i are commutative with T.

We prove following main results.

Let T be a closed operator, T is a decomposable concerning identity if and only if T has a spectral capacity with P. D. I.

Let T be a bounded linear operator, T is decomposable concerning identity if and only if T is a decomposable multiplication operator introduced by C. Apostol.