第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

关于概率度量空间中扩张型映象的几个不动点定理*

张 颖

（成都电讯工程学院）

近年来，游兆永[1]，张石生[2]等人对概率度量空间中压缩型映象的不动点定理进行了广泛地研究。本文引入并讨论了概率度量空间中扩张型映象不动点的存在性和唯一性问题。

一 预备知识

Schweizer, Sklar 在[6]中证明：如果$(E,\mathscr{F},\Delta)$是具连续t-范数Δ的 Menger 空间，则$(E,\mathscr{F},\Delta)$是由邻域系

$$\{U_p(\varepsilon,\lambda),p\in E,\varepsilon>0,\lambda>0\}$$

所导出的拓扑$\mathscr{T}$的 Hausdorff 空间，上式中

$$U_p(\varepsilon,\lambda)=\{q\in E,F_{p,q}(\varepsilon)>1-\lambda\}.$$

按此拓扑$\mathscr{T}$，可以在 Menger 空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$中引入下面一系列的概念。

定义 1 我们称$\{p_n\}\subset(E,\mathscr{F},\Delta)$ $\mathscr{T}$-收敛于$p_*\in E$，(记为$p_n\xrightarrow{\mathscr{T}}p_*$)，如果对任意的$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n\geqslant N$时，$F_{p_n,p_*}(\varepsilon)>1-\lambda$. $\{p_n\}\subset E$称为$\mathscr{T}$-Cauchy列，如果对任意的$\varepsilon>0,\lambda>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$m,n\geqslant N(\varepsilon,\lambda)$时，$F_{p_n,p_m}(\varepsilon)>1-\lambda$.

定义 2 Menger空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$称为$\mathscr{T}$-完备的，如果E中每一$\mathscr{T}$-Cauchy列都$\mathscr{T}$-收敛于E中某一点。

定义 3 设T是$(E,\mathscr{F},\Delta)\to(E,\mathscr{F},\Delta)$的映象，我们称$T$为$\mathscr{T}$-连续的，如果$T$映$E$中每一$\mathscr{T}$-收敛的序列为$\mathscr{T}$-收敛的序列。

定义 4 我们称函数$\Phi(t)$满足条件(Φ)，如果

$\Phi(t):R^+\to R^+$，不减，$\Phi(0)=0$且存在常数，$k\in(0,1)$，使得

$$\Phi(kt)\geqslant t,\forall t\in R^+;\ \lim_{n\to\infty}\Phi^n(t)=\infty,\forall t\in R^+,$$

其中$\Phi^n(t)$表$\Phi(t)$的第n次迭代。

引理[6] 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一具有连续t-范数Δ的Menger 空间，则$\{p_n\}\subset E$ $\mathscr{T}$-收敛于$p_*\in E$的充分必要条件是对每一$t\in R$，点态地有

$$\lim_{n\to\infty}F_{p_n,p_*}(t)=H(t).$$

*1983年5月5日收到.

二　主要结果

以下处处假定$(E,\mathscr{F},\Delta)$是$\mathscr{F}$-完备的Menger空间，Δ是满足：$\Delta(t,t)\geqslant t, t\in R^+$ 的连续t-范数。

定理 1　设T,S是空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{F}$-连续的，满的自映象，设函数$\Phi(t)$满足条件(Φ)，且存在反函数$\Psi(t)$，使得对一切$t\geqslant 0$有

$$F_{Tx,Sy}(t)\leqslant\max\{F_{x,y}(\Psi(t)),F_{x,Tx}(\Psi(t)),F_{y,Sy}(\Psi(t))\},\quad \forall x,y\in E. \tag{1}$$

则T,S在E中存在公共不动点。

证　对任一点$x_0\in E$，作序列：

$$\{x_{2n}=Tx_{2n+1},x_{2n+1}=Sx_{2n+2}\}_{n=0}^{\infty}.$$

由(1)式，对一切$t\geqslant 0$有

$$\begin{aligned}F_{x_{2n},x_{2n+1}}(t)&=F_{Tx_{2n+1},Sx_{2n+2}}(t)\\&\leqslant\max\{F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(\Psi(t)),F_{x_{2n+1},Tx_{2n+1}}(\Psi(t)),F_{x_{2n+2},Sx_{2n+2}}(\Psi(t))\}\\&=\max\{F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(\Psi(t)),F_{x_{2n},x_{2n+1}}(\Psi(t)),F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(\Psi(t))\}.\end{aligned}\tag{2}$$

若对某一点$t_0<0$，有

$$F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(\Psi(t_0))<F_{x_{2n},x_{2n+1}}(\Psi(t_0)). \tag{3}$$

于是，由(2)式得　$F_{x_{2n},x_{2n+1}}(t_0)\leqslant F_{x_{2n},x_{2n+1}}(\Psi(t_0))$。

反复使用上式得

$$F_{x_{2n},x_{2n+1}}(t_0)\leqslant F_{x_{2n},x_{2n+1}}(\Psi(t_0))\leqslant\cdots\leqslant F_{x_{2n},x_{2n+1}}(\Psi^m(t_0)),\quad m=1,2,\cdots.$$

于上式让$m\to\infty$取极限，并利用$\Psi(t)$是$\Phi(t)$的反函数可得$\lim\limits_{m\to\infty}F_{x_{2n},x_{2n+1}}(\Psi^m(t_0))=0$。从而$F_{x_{2n},x_{2n+1}}(\Psi(t_0))=0$。由(3)式得$F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(\Psi(t_0))<0$。这与$F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(t)$是分布函数矛盾。故对一切$t\geqslant 0$有

$$F_{x_{2n},x_{2n+1}}(\Psi(t))\leqslant F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(\Psi(t)),$$

再由(2)式可得

$$F_{x_{2n},x_{2n+1}}(t)\leqslant F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(\Psi(t)),\quad \forall t\geqslant 0.$$

同理可证$F_{x_{2n+1},x_{2n+2}}(t)\leqslant F_{x_{2n+2},x_{2n+3}}(\Psi(t))$，　$\forall t\geqslant 0$。

于是对一切$t\geqslant 0$有　$F_{x_{n-1},x_n}(t)\leqslant F_{x_n,x_{n+1}}(\Psi))$，$n=1,2,\cdots$，

即有

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\Phi(t)),\forall t\geqslant 0,\ n=1,2,\cdots.$$

反复使用上式，对一切$t\geqslant 0$有

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\Phi(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{x_0,x_1}(\Phi^n(t)). \tag{4}$$

于是对任给$\varepsilon>0$和正整数$m,n(n<m)$，由(4)式和$\Delta(t,t)\geqslant t$以及$\Phi(kt)\geqslant t$，有

$$\begin{aligned}F_{x_n,x_m}(\varepsilon)&\geqslant\Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(\varepsilon-k\varepsilon),F_{x_{n+1},x_m}(k\varepsilon))\\&\geqslant\Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),\Delta(F_{x_{n+1},x_{n+2}}(k\varepsilon-k^2\varepsilon),F_{x_{n+2},x_m}(k^2\varepsilon)))\\&\geqslant\Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),\Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^{n+1}(k\varepsilon-k^2\varepsilon)),F_{x_{n+2},x_m}(k^2\varepsilon)))\\&\geqslant\Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),\Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),F_{x_{n+2},x_m}(k^2\varepsilon)))\\&=\Delta(\Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon))),F_{x_{n+2},x_m}(k^2\varepsilon))\end{aligned}$$

$$\geqslant \Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon - k\varepsilon)), F_{x_{n+1},x_m}(k^2\varepsilon)).$$

对上式用归纳法可得

$$F_{x_n,x_m}(\varepsilon) \geqslant \Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon - k\varepsilon)), F_{x_{m-1},x_m}(\varepsilon k^{m-n-1}))$$
$$\geqslant \Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon - k\varepsilon)), F_{x_0,x_1}(\Phi^{m-1}(\varepsilon k^{m-n-1})))$$
$$\geqslant \Delta(F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon - k\varepsilon)), F_{x_0,x_1}(\Phi^n(\varepsilon))).$$

再利用条件(Φ)可知$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$是 E 中的$\mathscr{T}$-Cauchy 列，由 E 的$\mathscr{T}$-完备性，设$x_n \xrightarrow{\mathscr{T}} x \in E$，则序列$\{x_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$，$\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$也都收敛于 x，由T,S的$\mathscr{T}$-连续性可知 x 是 T,S 的公共不动点。定理得证。

推论 1　设 T,S 是空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$上$\mathscr{T}$-连续的满的自映象。设存在常数 $k\in(0,1)$，使得对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$F_{Tx,Sy}(t) \leqslant \max\{F_{x,y}(kt) F_{x,Tx}(kt),\ F_{y,Sy}(kt)\}, \forall x,y \in E.$$

则 T,S 在 E 中存在公共不动点。

证　只要在定理 1 中取 $\Psi(t) = kt$ 即可。

注 1　推论 1 中 $T=S$ 的结论，把王尚志等[3]中的主要结果推广到概率度量空间。

定理 2　设 T,S 是空间 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 的$\mathscr{T}$-连续的自映象。设 $A_i:E\to T(E)\cap S(E)$，$(i=1,2)$是与 T 和 S 可交换的$\mathscr{T}$-连续映象，而且存在满足条件(Φ)的函数 $\Phi(t)$，使得对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$F_{A_1x,A_2y}(t) \geqslant \min\{F_{Tx,Sy}(\Phi(t)), F_{Tx,A_1x}(\Phi(t)), F_{Sy,A_2y}(\Phi(t))\}, \ \forall x,y\in E. \tag{5}$$

则 A_1,A_2,T,S 在 E 中有唯一公共不动点。

证　任取 $x_0\in E$，因 $A_iE\subset T(E)\cap S(E)$，$i=1,2$，故可选一点 $x_1\in E$，使得 $A_1x_0=Sx_1$，又可选一点 $x_2\in E$，使得 $A_2x_1=Tx_2$。一般地选定 x_{2n} 后，可选 $x_{2n+1}\in E$，使得 $A_1x_{2n}=Sx_{2n+1}$，又可选 $x_{2n+2}\in E$，使得 $A_2x_{2n+1}=Tx_{2n+2}$，$n=1,2,\cdots$。令

$$y_{2n}=A_1x_{2n}, y_{2n+1}=A_2x_{2n+1}, n=0,1,2,\cdots.$$

由(5)式对一切 $t\geqslant 0$ 可得

$$F_{y_{2n-1},y_{2n}}(t) = F_{A_2x_{2n-1},A_1x_{2n}}(t) \tag{6}$$
$$\geqslant \min\{F_{Tx_{2n},Sx_{2n-1}}(\Phi(t)), F_{Tx_{2n},A_1x_{2n}}(\Phi(t)), F_{Sx_{2n-1},A_2x_{2n-1}}(\Phi(t))\}$$
$$= \min\{F_{y_{2n-1},y_{2n-2}}(\Phi(t)), F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi(t)), F_{y_{2n-2},y_{2n-1}}(\Phi(t))\}$$
$$= \min\{F_{y_{2n-2},y_{2n-1}}(\Phi(t)), F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi(t))\}.$$

若存在某 $t_0>0$，使得

$$F_{y_{2n-2},y_{2n-1}}(\Phi(t_0)) > F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi(t_0)), \tag{7}$$

由(6)式，有　$$F_{y_{2n-1},y_{2n}}(t_0) \geqslant F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi(t_0)).$$

反复使用上式可得

$$F_{y_{2n-1},y_{2n}}(t_0) \geqslant F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi(t_0)) \geqslant \cdots \geqslant F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi^m(t_0)), m=1,2,\cdots.$$

于上式让 $m\to\infty$，并注意条件(Φ)，得

$$F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi(t_0)) = 1.$$

把此式与(7)式综合得 $F_{y_{2n-2},y_{2n-1}}(\Phi(t_0))>1$。这与 $F_{y_{2n-2},y_{2n-1}}(t)$是分布函数矛盾。故对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi(t))\geqslant F_{y_{2n-1},y_{2n-1}}(\Phi(t))_{\circ}$$

从而由(6)式知对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$F_{y_{2n-1},y_{2n}}(t)\geqslant F_{y_{2n-2},y_{2n-1}}(\Phi(t))_{\circ}$$

同理可证，对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$F_{y_{2n},y_{2n+1}}(t)\geqslant F_{y_{2n-1},y_{2n}}(\Phi(t))_{\circ}$$

于是对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$F_{y_n,y_{n+1}}(t)\geqslant F_{y_{n-1},y_n}(\Phi(t)),\quad n=1,2,\cdots_{\circ}$$

从而对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$F_{y_n,y_{n+1}}(t)\geqslant F_{y_{n-1},y_n}(\Phi(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{y_0,y_1}(\Phi^n(t)),n=1,2,\cdots_{\circ}$$

故对任意 $\varepsilon>0$ 和正整数 $m,n(n<m)$，由 $\Phi(kt)\geqslant t$ 和Φ的不减性有

$$\begin{aligned}F_{y_n,y_m}(\varepsilon)&\geqslant\Delta(F_{y_n,y_{n+1}}(\varepsilon-k\varepsilon),F_{y_{n+1},y_m}(k\varepsilon))\\&\geqslant\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),\Delta(F_{y_{n+1},y_{n+2}}(k\varepsilon-k^2\varepsilon),F_{y_{n+2},y_m}(k^2\varepsilon)))\\&\geqslant\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^{n+1}(k\varepsilon-k^2\varepsilon)),F_{y_{n+2},y_m}(k^2\varepsilon)))\\&\geqslant\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),F_{y_{n+2},y_m}(k^2\varepsilon)))\\&=\Delta(\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon))),F_{y_{n+2},y_m}(k^2\varepsilon))\\&\geqslant\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),F_{y_{n+2},y_m}(k^2\varepsilon))_{\circ}\end{aligned}$$

一般地由归纳法可证 $F_{y_n,y_m}(\varepsilon)\geqslant\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),F_{y_{m-1},y_m}(\varepsilon k^{m-n-1}))$，

但因 $F_{y_{m-1},y_m}(\varepsilon k^{m-n-1})\geqslant F_{y_0,y_1}(\Phi^{m-1}(\varepsilon k^{m-n-1}))\geqslant F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon))$，

于是

$$F_{y_n,y_m}(\varepsilon)\geqslant\Delta(F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon-k\varepsilon)),F_{y_0,y_1}(\Phi^n(\varepsilon)))_{\circ}$$

由条件(Φ)可知$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$是$\mathscr{T}$-Cauchy 列.再由 E 的$\mathscr{T}$-完备性，设$y_n\xrightarrow{\mathscr{T}}y_*\in E$。因$A_1,A_2,T,S$ 均为$\mathscr{T}$-连续且互为可交换的，于是

$$Sy_*=\lim_{n\to\infty}Sy_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}SA_2x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}A_2Sx_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}A_2y_{2n}=A_2y_*.$$

同理可证 $Ty_*=A_1y_*$。于是对一切 $t>0$ 有

$$\begin{aligned}F_{A_1y_*,A_2y_*}(t)&\geqslant\min\{F_{Ty_*,Sy_*}(\Phi(t)),F_{Ty_*,A_1y_*}(\Phi(t)),F_{Sy_*,A_2y_*}(\Phi(t))\}\\&=\min\{F_{A_1y_*,A_2y_*}(\Phi(t)),F_{A_1y_*,A_2y_*}(\Phi(t)),F_{A_1y_*,A_2y_*}(\Phi(t))\}\\&=F_{A_1y_*,A_2y_*}(\Phi(t))_{\circ}\end{aligned}$$

反复使用上式，对一切 $t>0$ 有

$$F_{A_1y_*,A_2y_*}(t)\geqslant F_{A_1y_*,A_2y_*}(\Phi(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{A_1y_*,A_2y_*}(\Phi^m(t)),\quad m=1,2,\cdots$$

由条件(Φ)及于上式让 $m\to\infty$得

$$F_{A_1y_*A_2y_*}(t)=1,\quad\forall t>0_{\circ}$$

从而 $A_1y_*=A_2y_*$，于是 $Sy_*=Ty_*$。令 $u=A_1y_*$，由(5)式对一切 $t>0$ 有

$$\begin{aligned}F_{u,A_1u}(t)&=F_{A_1y_*,A_1A_1y_*}(t)=F_{A_1y_*,A_2A_1y_*}(t)\\&\geqslant\min\{F_{Ty_*,SA_1y_*}(\Phi(t)),F_{Ty_*,A_1y_*}(\Phi(t)),F_{SA_1y_*,A_2A_1y_*}(\Phi(t))\}\\&=\min\{F_{u,A_1u}(\Phi(t)),F_{u,u}(\Phi(t)),F_{A_1u,A_1u}(\Phi(k))\}\\&=F_{u,A_1u}(\Phi(t))_{\circ}\end{aligned}$$

仿上可证得 $u=A_1u$。而

$u=A_1u=A_1A_1y_*=A_1Sy_*=Su$, $u=A_1u=A_1Ty_*=TA_1y_*=Tu$, $u=A_1u=A_1A_2y_*$
$=A_2A_1y_*=A_2u$,

即u为A_1,A_2,T,S的公共不动点。

设v也是A_1,A_2,T,S的公共不动点，则对一切$t>0$有

$$\begin{aligned}F_{v,u}(t)&=F_{A_1v,A_1u}(t)\\&\geqslant\min\{F_{Tv,Su}(\Phi(t)),F_{Tv,A_1u}(\Phi(t)),F_{Sv,A_1u}(\Phi(t))\}\\&=\min\{F_{v,u}(\Phi(t)),F_{v,u}(\Phi(t)),F_{u,u}(\Phi(t))\}\\&=F_{v,u}(\Phi(t)).\end{aligned}$$

仿上同样可证$v=u$。定理得证。

由定理2显然可得下面结果。

推论 2　设T,S是空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$-连续自映象。设$A_i:E\to T(E)\cap S(E)$, $(i=1,2)$是与T和S可交换的$\mathscr{T}$-连续映象，而且存在满足条件(Φ)的函数$\Phi(t)$，使得对一切$t\geqslant0$有

$$F_{A_ix,A_iy}(t)\geqslant F_{Tx,Sy}(\Phi(t)),\quad\forall x,y\in E.$$

则定理2的结论成立。

推论 3　设T,S是空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$-连续自映象。设$A_i:E\to T(E)\cap S(E)$ $(i=1,2)$是与T,S可交换的$\mathscr{T}$-连续映象，而且存在常数$k\in(0,1)$，使得对一切$t\geqslant0$有

$$F_{A_ix,A_iy}(t)\geqslant F_{Tx,Sy}(t/k),\forall x,y\in E.$$

则定理2的结论成立。

证　只要在推论2中取$\Phi(t)=\dfrac{t}{k}$即可。

注 2　推论2,3把Jungck[4], Fisher[5]的主要结果推广到概率度量空间。

定理 3　设$\{T_i\}_{i\in I}$（I是指标集，I的势$\geqslant2$）是空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$上的$\mathscr{T}$-连续自映象列。设存在$\mathscr{T}$-连续映象$A_n:E\to\bigcap_{i\in I}T_i(E)$, $(n=1,2)$，它们与每一$T_i(i\in I)$可交换，而且对任意$i,j\in I,i\neq j$和一切$t\geqslant0$有

$$F_{A_ix,A_iy}(t)\geqslant\min\{F_{T_ix,T_jy}(\Phi(t)),F_{T_ix,A_ix}(\Phi(t)),F_{T_jy,A_iy}(\Phi(t))\},\forall x,y\in E.\quad(8)$$

其中函数$\Phi(t)$满足条件(Φ)。则$A_1,A_2,\{T_i\}_{i\in I}$在E中存在唯一公共不动点。

证　对任意$i,j,m\in I,i\neq j,i\neq m$，由定理2知存在$A_1,A_2,T_i,T_j$的唯一公共不动点$x_{ij}$，同样存在$A_1,A_2,T_i,T_m$的唯一公共不动点$x_{im}$，由(8)式对一切$t>0$有

$$\begin{aligned}F_{x_{ij},x_{im}}(t)&=F_{A_ix_{ij},A_ix_{im}}(t)\\&\geqslant\min\{F_{T_ix_{ij},T_mx_{im}}(\Phi(t)),F_{T_ix_{ij},A_ix_{ij}}(\Phi(t)),F_{T_mx_{im},A_ix_{im}}(\Phi(t))\}\\&=\min\{F_{x_{ij},x_{im}}(\Phi(t)),F_{x_{ij},x_{ij}}(\Phi(t)),F_{x_{im},x_{im}}(\Phi(t))\}\\&=F_{x_{ij},x_{im}}(\Phi(t)).\end{aligned}$$

利用条件(Φ)，仿定理2的证明可得$x_{ij}=x_{im}$。现让$i,j,m(i\neq j,i\neq m)$在I中任意地变动，可证得$A_1,A_2,\{T_i\}_{i\in I}$在E中存在公共不动点，并且不动点是唯一的。定理得证。

定理 4　设$\{T_i\}_{i\in I}$（I的势$\geqslant2$）是空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$上的$\mathscr{T}$-连续自映象。设$A_k:E\to\bigcap_{i\in I}(T_iE)$, $(k=1,2)$是$\mathscr{T}$-连续映象，它们与每一$T_i(i\in I)$可交换。并设存在两正整数

m, n，使得对任意 $i, j \in I, i \neq j$ 和一切 $t \geqslant 0$ 有

$$F_{A_1^n x, A_2^m y}(t) \geqslant \min\{F_{T_i x, T_j y}(\Phi(t)),\ F_{T_i x, A_1^n x}(\Phi(t)),\ F_{T_j y, A_2^m y}(\Phi(t))\},\quad \forall x, y \in E \qquad (9)$$

其中函数 $\Phi(t)$ 满足条件(Φ)。则 $A_1, A_2, \{T_i\}_{i \in I}$ 在 E 中存在唯一公共不动点。

证 令 $B = A_1^n, C = A_2^m$，由定理 3 知，$B, C, \{T_i\}_{i \in I}$ 在 E 中有唯一公共不动点 u，因

$$A_1^n A_1 u = A_1 A_1^n u = A_1 u, \qquad A_2^m A_2 u = A_2 A_2^m u = A_2 u. \qquad (10)$$

即 $A_1 u$ 是 A_1^n 的不动点，$A_2 u$ 是 A_2^m 的不动点。又因

$$T_i A_1 u = A_1 T_i u = A_1 u, \quad T_i A_2 u = A_2 T_i u = A_2 u, \quad \forall i \in I, \qquad (11)$$

于是由(9)式，对一切 $t > 0$ 和 $i, j \in I, i \neq j$ 有

$$\begin{aligned} F_{A_1 u, A_2 u}(t) &= F_{A_1^n A_1 u, A_2^m A_2 u}(t) \\ &\geqslant \min\{F_{T_j A_1 u, T_j A_2 u}(\Phi(t)), F_{T_i A_1 u, A_1^n A_1 u}(\Phi(t)), F_{T_j A_2 u, A_2^m A_2 u}(\Phi(t))\} \\ &= \min\{F_{A_1 u, A_2 u}(\Phi(t)), F_{A_1 u, A_1 u}(\Phi(t)), F_{A_2 u, A_2 u}(\Phi(t))\} \\ &= F_{A_1 u, A_2 u}(\Phi(t)). \end{aligned}$$

由上式仿定理 2 的证明可得 $A_1 u = A_2 u$

由(10),(11)式知 $A_1 u = A_2 u$ 是 $B, C, \{T_i\}_{i \in I}$ 的公共不动点，从而由定理 3 得

$$u = A_1 u = A_2 u = T_i u, i \in I.$$

同理可证 u 是 $A_1, A_2, \{T_i\}_{i \in I}$ 的唯一公共不动点。

由定理 4 显然可得下面的结果。

推论 4 设 $\{T_i\}_{i \in I}$（I 的势 $\geqslant 2$）是空间 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 上的 $\mathscr{F}$-连续自映象.设 $A: E \to \bigcap_{i \in I}(T_i E)$ 是 $\mathscr{F}$-连续映象，它与每一 $T_i, i \in I$ 可交换。并设存在两正整数 m, n，使得对任意 $i, j \in I, i \neq j$ 和一切 $t \geqslant 0$ 有

$$F_{A^n x, A^m y}(t) \geqslant \min\{F_{T_i x, T_j y}(\Phi(t)), F_{T_i x, A^n x}(\Phi(t)), F_{T_j y, A^m y}(\Phi(t))\}, \forall x, y \in E,$$

其中函数 $\Phi(t)$ 满足条件(Φ)。则 $A, \{T_i\}_{i \in I}$ 在 E 中存在唯一公共不动点。

参 考 文 献

[1] 游兆永，概率度量空间压缩映象的拟 Picard 迭代收敛定理，数学研究与评论，创刊号，25—28 (1981)。

[2] 张石生，概率度量空间中映象的不动点定理及其应用，中国科学(A辑)，No.6 (1983)，495—504。

[3] 王尚志，李伯渝，高智民，膨胀算子及其不动点定理，数学进展，第11卷，第2期(1982)，149—153。

[4] Jungck, G., Commuting mapping and fixed points, *Amer. Math. Monthly*, 83 (1976), 261—263.

[5] Fisher, B., Mappings with a common fixed points, *Math. Seminar Notes*, 7(1979), 81—83.

[6] Schweizer, B., Sklar, A., Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, 10(1960), 313, —334.