第5卷 第1期 1985年1月 | 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION | Vol.5 No.1 Jan. 1985

不连续系统的实用稳定性

贺建勋

（厦门大学）

实用稳定性的概念，首先在[2]中就连续系统的情形提出。在[3,4]中，继续对连续系统的情形作过讨论。而不连续系统实用稳定性的研究仅见于[5]，其中只给出了三个判别准则（定理1～3）。本文系统地研究了不连续系统的实用稳定性，给出比文[5]广泛的各种实用稳定性的概念，得到了判别各种实用稳定性或实用不稳定性的一系列准则。

§1 概念和定义

本文考虑由常微分方程描述的不连续系统

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{1}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$，f 是定义在 $n+1$ 维区域 G（设 $G=E_+^1\times H$）上的 n 维向量函数，$0\in H$。假设 f 在 G 上可测，对任意有界闭域 $D\subset G$，存在 L-可积函数 $m(t)$，使得 $|f(t,x)|\leqslant m(t)$ 在 D 上 $a.e.$（几乎处处）成立。若 f 在 G 上满足上述条件就简称 f 在 G 上满足条件 ϕ，记为 $f(t,x)\in\phi(G,E^n)$；且把相应的不连续系统（1）称为 ϕ-系统；系统的解称为 ϕ-解[1,6]。

下面，假设 $f(t,0)=0$ 当 $t\in E_+^1$ 时 $a.e.$ 成立，且设（1）的解满足唯一性条件[6]和右边整体存在性条件[7]。

本文采用文[6,7]中所用记号，此处不再重述。今补充假设 Q_0 和 Q 为有界连通开集，$Q_0\subset Q\subset H$，且 $0\in Q$；∂Q 和 $\bar{Q}$ 分别表示 Q 的边界和闭包；$S_d\triangleq\{x\,|\,|x|<d\}$；$[S_\beta-S_\alpha]\triangleq\{x\,|\,x\in S_\beta$ 而 $x\bar{\in}S_\alpha\}$ 其中 $0<\alpha<\beta$，$x\bar{\in}S_\alpha$ 表示点 x 不在开球 S_α 中。今后如无特别声明，总假设 $\alpha<\beta$，Q_0 为 Q 的真子集。

令 $t_k\in E_+^1$，$x^k=x(t_k)\in Q_0$，ϕ-系统（1）过点 (t_k,x^k) 的解记为 $x(t,t_k,x^k)$，这时 $x(t_k,t_k,x^k)=x^k$。

设 a 为 n-维向量，记号 $M_x\{a\cdot f(t,x(t))\}$，$m_x\{a\cdot f(t,x(t))\}$ 分别表示当 t 固定时纯量函数 $a\cdot f(t,x)$ 在点 $x=x(t)$ 的本质上界和本质下界。

关于实用稳定性的概念，[2]与[3～5]的提法有所不同，本文综合二者合理部分形成下面的概念。在下面的诸定义中，可假定 $\alpha\leqslant\beta$；Q_0 不要求是 Q 的真子集。

*1982年3月21日收到。

定义 1 称 ϕ-系统(1)关于 (Q_0,Q,t_0) 是实用稳定的，如果 $x^0\in Q_0$，就有 $x(t,t_0,x^0)\in Q$ 当 $t\in J$ 时。

定义 2 称 ϕ-系统(1)关于 (Q_0,Q) 是实用一致稳定的，如果 $\forall t_k\in E^1_+$，$x^k\in Q_0$，都有 $x(t,t_k,x^k)\in Q$ 当 $t\in[t_k,\infty)$ 时。

定义 3 称 ϕ-系统(1)关于 (Q_0,Q,t_0) 是实用渐近稳定的，如果对 $x^0\in Q_0$，有 $x(t,t_0,x^0)\in Q$ 当 $t\in J$ 时；同时，$x(t,t_0,x^0)\to 0$ 当 $t\to\infty$ 时。

定义 4 称 ϕ-系统(1)关于 (Q_0,Q) 是实用一致渐近稳定的，如果 $\forall t_k\in E^1_+$、$x^k\in Q_0$，都有 $x(t,t_k,x^k)\in Q$。当 $t\in[t_k,\infty)$；同时，$x(t,t_k,x^k)\to 0$ 当 $t\to\infty$ 时。

定义 5 称 ϕ-系统(1)关于 $(\alpha,\beta,\gamma,t_0)$ 是实用指数稳定的，$0<\alpha<\beta$，$\gamma>0$，如果 $x^0\in S_\alpha$，就有 $|x(t,t_0,x^0)|<\beta e^{-\gamma(t-t_0)}$，当 $t\in J$ 时。

定义 6 称 ϕ-系统(1)关于 (Q_0,Q,t_0) 是实用不稳定的，如果存在某个 $x^0\in Q_0$ 和 $t_1>t_0$，使得 $x(t_1,t_0,x^0)\bar{\in} Q$。

定义 7 若在定义1～4和定义6中，有 $Q_0=S_\alpha, Q=S_\beta$，就相应地称 ϕ-系统(1)关于 (α,β,t_0) 实用稳定、关于 (α,β) 实用一致稳定、关于 (α,β,t_0) 实用渐定稳定、关于 (α,β) 实用一致渐近稳定和关于 (α,β,t_0) 实用不稳定。

下面要用到不连续的纯量比较系统

$$\dot{z}=w(t,z), \tag{C}$$

其中假设 $w\in\phi(E^1_+\times E^1,E^1)$，并设(C)的解右边整体存在[7]。今后以 $z^*(t,t_0,z_0)$，$z_*(t,t_0,z_0)$ 分别表示系统(C)过点 (t_0,z_0) 的右行最大解和最小解。

§2 主要结果

定理 1 对于 ϕ-系统(1)，若存在函数 $v(t,x)\in C^1(J\times\bar{Q},E^1)$ 和函数 $w(t,z)\in\phi(J\times E^1,E^1)$，满足不等式

i) $v_t(t,x)+v_x(t,x)\cdot f(t,x)\leqslant w(t,v(t,x))$，$a.e.(t,x)\in J\times Q$；

ii) $z^*(t,t_0,z_0)<\inf\limits_{x\in\partial Q}v(t,x)$，当 $t\in J$，

其中 $z_0\triangleq\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x)$；$v_t$ 表示 v 关于 t 的偏导数；$v_x\triangleq(v_{x_1},v_{x_2},\cdots,v_{x_n})$。则 ϕ-系统(1)关于 (Q_0,Q,t_0) 是实用稳定的。

证明 提要：若结论不真，则存在 $t_1>t_0$，使得第一次 $x(t_1,t_0,x^0)\in\partial Q$。

这时函数 $v(t,x)$ 沿着系统(1)的解 $x(t,t_0,x^0)$ 关于 t 的全导数 $\dot{v}(t,x(t,t_0,x^0))$ 并不 $a.e.$ 等于条件 i) 的左边以解 $x(t,t_0,x^0)$ 代入之值。但可以证明不等式

$$\dot{v}(t,x(t,t_0,x^0))\leqslant M_z\{w(t,v(t,x(t,t_0,x^0)))\},\ a.e.\ t\in[t_0,t_1)\text{成立。} \tag{3.1}$$

因为 $v(t_0,x^0)\leqslant\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x)=z_0$，于是由文[7]引理2得

$$v(t,x(t,t_0,x^0))\leqslant z^*(t,t_0,z_0),\ \text{当}\ t\in[t_0,t_1], \tag{3.2}$$

根据(3.2)和条件 ii) 易得

$$v(t_1,x(t_1,t_0,x^0))<\inf_{x\in\partial Q}v(t_1,x),\ t_1>t_0.$$

此不等式说明，$x(t_1,t_0,x^0)\bar{\in}\partial Q$，这与原假设矛盾，从而定理得证。

用上述类似的方法可以证明

定理 2 对ϕ-系统(1)，设$\partial Q_0\cap\partial Q=\varnothing$($\varnothing$表示空集)．若存在函数$v(t,x)\in C^1(E_+^1\times\bar{Q},E^1)$和$w(t,z)\in\phi(E_+^1\times E^1,E^1)$，使得满足下列条件

i) $v_t(t,x)+v_x(t,x)\cdot f(t,x)\leqslant w(t,v(t,x))$，a.e. $(t,x)\in E_+^1\times[Q-\bar{Q}_0]$；

ii) $z^*(t_2,t_1,\sup\limits_{x\in\partial Q_0}v(t_1,x))<\inf\limits_{x\in\partial Q}v(t_2,x)$，$\forall t_1,t_2\in(0,\infty)$且$t_2>t_1$。则$\phi$-系统(1)关于$(Q_0,Q)$是实用一致稳定的。

现在讨论实用渐近稳定的问题。若补充假定$v(t,x)$在域$\bar{Q}$上定正．令$\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x)=b$，则$b>0$。假设$\forall z_0\in[0,b]$，对应于系统(C)的解均满足条件：$z(t,t_0,z_0)\to 0$，当$t\to\infty$时。则从上面定理1的证明中，容易推出只要$x^0\in Q_0$，就有$x(t,t_0,x^0)\to 0$，当$t\to\infty$时。于是我们得到

定理 3 ϕ-系统(1)关于(Q_0,Q,t_0)是实用渐近稳定的，如果定理1的条件成立，此外还满足条件：iii) 函数$v(t,x)$在$\bar{Q}$上是定正的；iv) $\forall z_0\in[0,b]$，比较系统(C)的解$z(t,t_0,z_0)\to 0$当$t\to\infty$时。

根据定理2和上面类似的讨论，可得

定理 4 ϕ-系统(1)关于(Q_0,Q)是实用一致渐近稳定的，如果定理2的条件i)当$(t,x)\in E_+^1\times\bar{Q}$时a.e.成立，条件ii)成立，且还满足：iii) 函数$v(t,x)$在$\bar{Q}$上是定正的；iv) $\forall t_k\in E_+^1$，$z_k\in[0,b_k]$，系统(C)的解$z^*(t,t_k,z_k)\to 0\ (t\to\infty)$，其中$b_k\triangleq\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_k,x)$。

定理 5 对ϕ-系统(1)，若存在函数$v(t,x)\in C^1(G,E^1)$和$w(t,z)\in\phi(J\times E^1,E^1)$以及$t_1\in(t_0,\infty)$，使得

i) $v_t(t,x)+v_x(t,x)\cdot f(t,x)\geqslant w(t,v(t,x))$，a.e. $(t,x)\in G$成立；

ii) $z_*(t_1,t_0,\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x))>\sup\limits_{x\in Q}v(t_1,x)$。

则系统(1)关于(Q_0,Q,t_0)是实用不稳定的。

证明 提要：令$z_*(t_1,t_0,\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x))-\sup\limits_{x\in Q}v(t_1,x)=\varepsilon>0$．根据最小$\phi$-解关于初值$z_0$的下方连续相依性，总能找到$x^0\in Q_0$，只要$v(t_0,x^0)$与$\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x)$充分接近，就可使

$0\leqslant z_*(t,t_0,\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x))-z_*(t,t_0,v(t_0,x^0))\leqslant\varepsilon/2$，当$t\in[t_0,t_1]$。由条件i)可证不式

$$\dot{v}(t,x(t,t_0,x^0))\geqslant m_z\{w(t,v(t,x(t,t_0,x^0)))\}，\ \text{a.e. } t\in[t_0,t_1)。$$

由此并根据文[7]引理3，就得结论为真。

推论 1 若定理1～5中的条件是对$Q_0=S_\alpha$，$Q=S_\beta$成立，则得到ϕ-系统(1)相应地关于(α,β,t_0)实用稳定、关于(α,β)实用一致稳定、关于(α,β,t_0)实用渐近稳定、关于(α,β)实用一致渐近稳定和关于(α,β,t_0)实用不稳定的结论。

定理 6 ϕ-系统(1)关于$(\alpha,\beta,\gamma,t_0)$是实用指数稳定的，如果存在定正函数$v(t,x)\in C^1(J\times\bar{S}_\beta,E_+^1)$，使得满足下列条件：

i) $\alpha^2|x|^2\leqslant v(t,x)\leqslant\beta^2|x|^2$，当$(t,x)\in J\times S_\beta$；

ii) $\dot{v}(t,x(t,t_0,x^0))\leqslant-2\beta^2\gamma|x(t,t_0,x^0)|^2$, $a.e.\ t\in J$, $x\in S_\beta$成立。

此定理的证明可由条件直接积分得到。

仿文[5]的方法，易得下述更为一般和较为深刻细致的结果，证明可类似进行，从略。

定理 7 对ϕ-系统(1)，如果在$J\times\bar{Q}$上存在一个局部地满足 Lipschitz 条件的函数$v(t,x)$和一个在J上L-可积的函数$l(t)$，使得满足不等式

i) $\dot{v}(t,x(t,t_0,x^0))\leqslant l(t)$, $a.e.\ t\in J$, $x\in Q$;

ii) $\int_{t_0}^{t}l(\tau)d\tau<\inf\limits_{x\in\partial Q}v(t,x)-\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x)$, 当$t\in J$, $t\geqslant t_0$时。

则系统(1)关于(Q_0,Q,t_0)是实用稳定的。

定理 8 对于ϕ-系统(1)，设$\partial Q_0\cap\partial Q=\varnothing$，如果在$E_+^1\times[\bar{Q}-Q_0]$上存在一个局部地满足 Lipschitz 条件的函数$v(t,x)$和一个在E_+^1上L-可积的函数$l(t)$，使得满足不等式

i) $\dot{v}(t,x(t,t_1,x(t_1)))\leqslant l(t)$, 对$a.e.\ t\in[t_1,\infty)$, $\forall t_1\in E_+^1$, $x\in[Q-\bar{Q}_0]$;

ii) $\int_{t_1}^{t_2}l(\tau)d\tau<\inf\limits_{x\in\partial Q}v(t_2,x)-\sup\limits_{x\in\partial Q_0}v(t_1,x)$, 对$\forall t_1,t_2\in E_+^1$且$t_2>t_1$时。

则系统(1)关于(Q_0,Q)是实用一致稳定的。

定理 9 对ϕ-系统(1)，如果在$J\times\bar{Q}$上存在一个局部地满足 Lipschitz 条件的函数$v(t,x)$和一个在J上L-可积函数$l(t)$，对某点$x^0\in Q_0$和$t_1\in(t_0,\infty)$，使得满足

i) $\dot{v}(t,x(t,t_0,x^0))\geqslant l(t)$, 对$a.e.\ t\in J$, $x\in Q$;

ii) $\int_{t_0}^{t_1}l(\tau)d\tau>\sup\limits_{x\in\partial Q}v(t_1,x)-v(t_0,x^0)$;

iii) $v(t_1,x)\leqslant\sup\limits_{x\in\partial Q}v(t_1,x)$, 当$x\in Q$时。

则系统(1)关于(Q_0,Q,t_0)是实用不稳定的。

推论 2 若定理7～9中的条件是对$Q_0=S_\alpha$, $Q=S_\beta$成立，则得到系统(1)相应地关于(α,β,t_0)实用稳定、关于(α,β)实用一致稳定和关于(α,β,t_0)实用不稳定的结论。

这里的推论对应文[5]的定理1～3。从而文[5]的结果就成为本文定理7～9的特例；而且此处纠正了[5]中定理2、3某些欠妥之处。

下面的定理10、11及其推论是更加深刻细致的结果，这是文[5]中没有考虑过的。

定理10 对ϕ-系统(1)，若在$J\times\bar{Q}$上存在一个局部地满足 Lipschitz 条件的定正函数$v(t,x)$，使得满足不等式

i) $\dot{v}(t,x(t,t_0,x^0))<0$, 对$a.e.\ t\in J$, $x^0\neq0$, $x\in Q$;

ii) $\sup\limits_{x\in Q_0}v(t_0,x)\leqslant\inf\limits_{x\in\partial Q}v(t,x)$, 当$t\in J$时。

则系统(1)关于(Q_0,Q,t_0)是实用渐近稳定的。

定理11 对ϕ-系统(1)，设$\partial Q_0\cap\partial Q=\varnothing$，如果在$E_+^1\times\bar{Q}$上存在一个局部地满足 Lipschitz 条件的定正函数$v(t,x)$，使得满足不等式

i) $\dot{v}(t,x(t,t_1,x(t_1)))<0$, 对$a.e.\ t\in[t_1,\infty)$, $\forall t_1\in E_+^1$, $x\in Q$, $x(t_1)\neq0$;

ii) $\sup\limits_{x\in\partial Q_0}v(t_1,x)\leqslant\inf\limits_{x\in\partial Q}v(t_2,x)$, 对$\forall t_1,t_2\in E_+^1$且$t_2>t_1$时。

则系统(1)关于(Q_0,Q)是实用一致渐近稳定的。

推论 3　若定理10和11的条件是对 $Q_0=S_\alpha$，$Q=S_\beta$ 成立的，则系统(1)相应地关于 (α,β,t_0) 是实用渐近稳定和关于 (α,β) 实用一致渐近稳定。

注 1　本文的模|·|都是按欧氏模规定的，故定义和定理中均未如文[5]一样再重复标出。

注 2　对定理1,2,5和7～9而言，亦可按文[5]的假设，一般不要求 $f(t,0)=0$，这时结论仍真。此外，在上述定理中出现的函数 v 没有任何定号的要求。

注 3　实用稳定与Ляпунов意义下的稳定之间的一个显著差别是：实用稳定中出现的集合 Q_0, Q 和时刻 t_0 或数 α,β,γ,t_0 都是预先给定好了的。这里 Q_0 刻画初始状态容许变化的范围；Q 描述系统稳定运行时其随时间变化的状态不能超出的范围，t_0 表示预先选定的起始时刻。一般说来，系统的实用稳定或实用一致稳定并不蕴含Ляпунов意义下的稳定或一致稳定；反之亦然。而在同一时刻Ляпунов意义下的渐近稳定性并不保证实用渐近稳定性，这时甚至可能出现实用不稳定的情形。

参考文献

[1] Филиппов, А.Ф., Дифференциальные Уравнения С Разрывной Правой Частью, *Матем. СБ*,. 51(1960), №1, 99-128.

[2] Lasalle, J.P. and Lefschetz, S., Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications, New York, Academic Press, 1961.

[3] Michel, A.N., Quantitative analysis of simple and interconnected systems; stability. boundedness and trajectory behavior, *IEEE Transaction* CT-17 (1970), №3 292-301.

[4] Michel, A.N. and Miller, R.K., Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems, New York, Academic Press, 1977.

[5] Michel, A.N. and Porter, D.W., Practical stability and finite-time stability of discontinuous systems, *IEEE Transaction* CT-19(1972), №2, 123-129.

[6] 贺建勋，关于不连续系统解的普遍唯一性定理，数学学报 Vol. 26 (1983), No.3, 322—331.

[7] 贺建勋，不连续的Филиппов系统解的整体存在性和非整体存在性准则，华中师院学报（自然科学版），1981，№4，1-12.

Practical Stability of Discontinuous Systems

He Jianxun

Abstract

In this note, the following discontinuous system

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{1}$$

is considered, where $x\in E^n$, $t\in[0,+\infty]\triangleq E_+^1$, it is assumed that the functionf $f(t,x)$ is measurable on $G\subset E_+^1\times E^n$ and there exists a Lebesgue integrable function $m(t)$ such that $|f(t,x)|\leqslant m(t)$ is satisfied almost everywhere on each closed bounded region $D\subset G$. Such systems are called Filippov's discontinuous systems.

First of all, we are given two sets $Q_0, Q\,(Q_0\subset Q)$ and a number t_0, then the definitions of various practical stability with respect to (Q_0,Q,t_0) or (Q_0,Q) of discontinuous system ⟨1⟩ are given respectively. All main results which contain a lot of sufficient conditions ensuring various practical stability or pratical unstability are stated and proved in section 2;