第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

二阶椭圆型复方程的Riemann-Hilbert边值问题*

吴 凯

（南京通信工程学院）

§1 引 言

本文讨论复平面上的二阶线性非线性一致椭圆型复方程(实方程组的复形式)[1]

$$\begin{cases} w_{\bar{z}\bar{z}} = F(z, w, w_{\bar{z}}, w_z, w_{z\bar{z}}, w_{zz}), \\ F = Q_1 w_{z\bar{z}} + Q_2 \overline{w}_{\bar{z}z} + Q_3 w_{zz} + Q_4 \overline{w}_{\bar{z}\bar{z}} + F_0 \\ F_0 = A_1 w_{\bar{z}} + A_2 \overline{w}_z + A_3 w_z + A_4 \overline{w}_{\bar{z}} + A_5 w + A_6 \overline{w} + A_7, \\ Q_j = Q_j(z, w, w_{\bar{z}}, w_z, w_{z\bar{z}}, w_{zz}), \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ A_j = A_j(z, w, w_{\bar{z}}, w_z), \quad j = 1, \cdots, 7^{*)}, \end{cases} \tag{1.1}$$

于有界 $N+1$ 连通区域 G 上的 Riemann-Hilbert 边值问题。G 的边界 $\Gamma \in C^2_\mu$，$0<\mu<1$.不失一般性，可设 G 是单位圆 $|z|<1$ 内的 $N+1$ 连通圆界区域，其边界 Γ 是 $N+1$ 个圆周：Γ_m $|z-z_m| = \gamma_m$，$m=1,\cdots,N$，Γ_{N+1}：$|z|=1$，$z=0\in G$。并设方程(1.1)满足如文[1]中所述的条件 C.

所谓二阶一致椭圆型复方程(1.1)于 $N+1$ 连通圆界区域 G 上的 Riemann-Hilbert边值问题，即是求方程(1,1)于闭区域 $\overline{G}$ 上的连续可微解 $w(z)$，适合边界条件

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(z)}\, w(z)] = r_1(z), & z \in \Gamma, \\ \mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(z)}\, w_{\bar{z}} + \beta(z) w(z)] = r_2(z), & z \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.2}$$

这里 $|\lambda_j(z)| = 1$，$C^{2-j}_\nu[\lambda_j(z), \Gamma] \leqslant l_0$，$C^{2-j}_\nu[r_j(z), \Gamma] \leqslant l_0$，$j=1.2$，$C_\nu[\beta(z), \Gamma] \leqslant l_1$, l_0, l_1 $(0 \leqslant l_1 < l_0 < +\infty)$, $\nu\left(\frac{1}{2}<\nu<1\right)$都是实常数.

我们把方程(1.1)的以上边值问题简称为问题 A. 记 $\kappa_j = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg \lambda_j(z)$ $(j=1.2)$ 为问题 A 的指数.

§2 问题 A 的变态问题及其解的表示式和估计式

当 $\kappa_j \geqslant N$($j=1$ 或 2)时，问题 A 不适定。又当 $\kappa_j < N$($j=1$ 或 2)时，问题 A 不一定可解。为此，我们给出了问题 A 的如下变态问题：即是把边界条件(1.2)改为

*1981年12月28日收到. *)本文中所用符号，术语均与书[2]相同.

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(z)}\,w(z)]=r_1(z)+h_1(z), & z\in\Gamma,\\ \mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(z)}\,w_{\bar z}+\beta(z)\,w(z)]=r_2(z)+h_2(z), & z\in\Gamma.\end{cases}\tag{2.1}$$

这里，当 $\kappa_j\geqslant N(j=1$ 或 $2)$ 时，取 $h_j(z)\equiv 0$，$z\in\Gamma$。当 $0\leqslant\kappa_j<N(j=1$ 或 $2)$ 时，取

$$h_j(z)=\begin{cases}h_m^{(j)}, & z\in\Gamma_m,\quad m=1,\cdots,N-\kappa_j,\\ 0, & z\in\Gamma_m,\quad m=N-\chi_j+1,\cdots,N+1.\end{cases}$$

当 $\kappa_j<0$ $(j=1$ 或 $2)$ 时，取

$$h_j(z)=\begin{cases}h_m^{(j)}, & z\in\Gamma_m,\quad m=1,\cdots,N,\\ h_{N+1}^{(j)}+\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\kappa_j-1}(\lambda_n^{(j)}+i\lambda_{-n}^{(j)})z^n\right\}, & z\in\Gamma_{N+1}.\end{cases}$$

其中 $h_m^{(j)}$ $(m=1,\cdots,N+1,j=1$ 或 $2)$，$\lambda_{\pm n}^{(j)}$ $(n=1,\cdots,-\kappa_j-1;\ j=1$ 或 $2)$ 都是待定的实常数。

我们把方程(1.1)适合边界条件(2.1)的变态的边值问题简称为问题B。我们还要求问题B的解 $w(z)$ 适合给定的适定性的点型条件，并简称为问题C。

定理2.1 设 $w(z)$ 是方程(1.1)问题B的解，$w(z)\in W^2_{p_0}(G)$，$2<p_0<p$，则 $w(z)$ 可表示为：

$$\begin{cases}w(z)=X(z)+H_\rho, \quad H_\rho=T_1T_2\rho,\\ X(z)=\Phi_1(z)+T_1\Phi_2(z),\quad \rho(z)=w_{\bar z\bar z}\in L_{p_0}(\overline{G})\end{cases}\tag{2.2}$$

这里 $\Phi_1(z)$，$\Phi_2(z)$ 都是G内的解析函数，分别适合非齐次边界条件

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(z)}\,\Phi_1(z)]=r_1(z)+h_1(z), & z\in\Gamma\\ \mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(z)}\,\Phi_2(z)]=r_2(z)+h_2(z)-\mathrm{Re}[\beta(z)w(z)]. & z\in\Gamma.\end{cases}$$

而 $T_1\omega\,(\omega=w_{\bar z})$，$T_2\rho$ 分别为适合齐次边界条件

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(z)}\,T_1\omega]=h_1(z), & z\in\Gamma\\ \mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(z)}\,T_2\rho]=h_2(z), & z\in\Gamma\end{cases}$$

的积分算子。证明从略。

为了对方程(1.1)问题C的解$w(z)$作出估计，除了要假设方程(1.1)满足文[1]中所述的条件C，而且还要假设某些常数适当小。并且只就方程(1.1)满足以下条件

$$C^1[w(z),G]<M_1^*,\quad \|w_{\bar z\bar z}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}<M_2^*\tag{2.3}$$

的解 $w(z)$ 进行考虑。这里 M_1^*,M_2^* 是两个待定的常数。这样，仿照文[3]定理2.2证明中所用的方法，可以得到如下的定理：

定理2.2 设 $w(z)$ 是方程(1.1)问题C适合不等式(2.3)的解，$w(z)\in W^2_{p_0}(G)$。在某些常数适当小的条件下，$w(z)$ 满足估计式

$$C_\alpha^1[w(z),\overline{G}]<M_1,\quad \|w_{\bar z\bar z}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}<M_2\tag{2.4}$$

$$C_\alpha^1[X(z),\overline{G}]<M_3,\quad \|\,|X_{z\bar z}|+|X_{\bar z\bar z}|\,\|_{L_{p_0}(\overline{G})}<M_4.\tag{2.5}$$

这里 $X(z)$如同(2.2)中所示。$\alpha=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$2<p_0<\min\left(p,\ \dfrac{1}{1-\nu}\right)$，$M_j=M_j(q_0,p_0,k_0,G,\nu,l_0)$，$j=1,2,3,4$。这样，我们可以取 M_1，M_2 为(2.3)中的待定常数 M_1^* 与 M_2^*。

§3 复方程(1.1)问题A、问题C的可解性

定理3.1 方程(1,1)问题C是可解的。

证明　引入函数对 $\Omega=[w(z),\rho(z)]$，其中 $w(z)\in C^1(\bar{G})$，$\rho(z)\in L_{p_0}(\bar{G})$，$2<p_0<\min\left(p_0,\frac{1}{1-\nu}\right)$。记 $\|\Omega\|=C^1[w(z),\ \bar{G}]+\|\rho(z)\|_{L_{p_0}(\bar{G})}$，则所有这样的函数对Ω构成一 Banach 空间 B。

引入 B 中的有界开集 B_M，它由满足不等式 $C^1[w(z),\bar{G}]<M_1$，$\|\rho(z)\|_{L_{p_0}(\bar{G})}<M_2$ 的所有函数对 Ω 构成。这里的 M_1,M_2 与不等式(2.4)中的M_1,M_2 相同。

任取一 $\Omega\in B_M$，可求得在G内唯一的解析函数 $\psi_2(z)$[5]，它适合如下的边界条件

$$\begin{aligned}&Re\{\overline{\lambda_2(z)}[\psi_2(z)+T\rho]+t\beta(z)w(z)]\\&=tr_2(z)+h_2(z),\ z\in\Gamma\ (\text{其中 } t\in[0,1])\end{aligned}$$

与给定的适定性点型条件。因此，还可以求得在G内的唯一的解析函数 $\psi_1(z)$，它适合如下的边界条件

$$Re\{\overline{\lambda_1(z)}[\psi_1(z)+T\psi_2(z)+TT\rho]\}=tr_1(z)+h_1(z),\ z\in\Gamma$$

与给定的适定性点型条件。这里

$$T\rho=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta$$

记

$$\begin{cases}Y(z)=\psi_1(z)+T\psi_2(z)+\psi_3(z)\\ \psi_3(z)=-\dfrac{1}{a\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{H_0\rho d\zeta}{\zeta-z},\quad H_0\rho=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\rho(\zeta)(\overline{\zeta-z})}{\zeta-z}d\sigma_\zeta\\ W(z)=Y(z)+H_0\rho,\end{cases}$$

并记这样由 $w(z),\rho(z)$，t 到 $W(z)$的映射为 $W=\mathscr{L}_1(w,\rho,t)$。然后考虑积分方程*⁾，

$$\rho^*(z)=tF(z,W,\overline{W}_{\bar z},W_z,Y_{z\bar z}+\Pi\rho^*,Y_{zz}+\tilde{\Pi}\rho^*)\tag{3.1}$$

这里

$$\Pi\rho=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta,\ \tilde{\Pi}\rho=\frac{2}{\pi}\iint\frac{\rho(\zeta)\overline{(\zeta-z)}}{(\zeta-z)^3}d\sigma_\zeta.$$

注意到文[4]中所列出的结果，只要 p_0 足够接近 2，就可以由压缩映象原理知方程(3.1)在 $L_{p_0}(\bar{G})$中有唯一解 $\rho^*(z)$。再令 $w^*(z)=\mathscr{L}_1(w,\rho^*,t)$。

显然，这样就确定了由 $B_0=\bar{B}_M\times[0,1]$到B中元素 $\Omega^*=[w^*,\rho^*(z)]$的一个映射。记此映射为$\Omega^*=\mathscr{L}(\Omega,t)$。可以证明这个映射满足 Leary—Schauder 定理[7]的三个条件，因而泛函方程 $\Omega=\mathscr{L}(\Omega,t)$对任意的 $t\in[0,1]$均在 B_M 中有解。特别当 $t=1$ 时。即方程(1.1)问题C可解。证毕。

倘若把复方程(1.1)问题C的解 $w(t)$代入边界条件(2.1)，恰能使 $h_j(z)\equiv0$ $(j=1,2)$，那么 $w(z)$也就是问题A的解。例如当 $\kappa_1\geqslant N$，$\kappa_2<0$ 时，有 $h_1(z)\equiv0$。而要使 $h_2(z)\equiv0$，也就要使 $h_m^{(2)}=0$，$m=1,\cdots,N+1$，$h_{\pm n}^{(*)}=0,n=1,\cdots,-\kappa_2-1$。这样共有 $-2\kappa_2+N-1$个条件。故而在这种情况下问题A有 $-2\kappa_2+N-1$个可解条件。其他情况可以类似地讨论。

§4　二阶线性一致椭圆型复方程的 Riemann-Hilbert 边值问题

本节讨论二阶线性一致椭圆型复方程

*⁾我们先假定方程(1.1)的系数在边界Γ附近等于零。当求出在这种情况下问题 C 的解以后，再通过选取子序列的方法，可以消去对方程(1.1)系数的上述假定。

$$
\begin{cases}
Lw \equiv w_{z\bar z} - Q_1(z)w_{zz} - Q_2(z)\overline{w}_{\bar z\bar z} - Q_3(z)w_{zz} - Q_4(z)\overline{w}_{\bar z\bar z} \\
\quad = \varepsilon H(z, w, w_{\bar z}, w_z) + A_7(z) \\
H(z, w, w_{\bar z}, w_z) = A_1(z)w_{\bar z} + A_2(z)\overline{w}_z + A_3(z)w_z \\
\quad + A_4(z)\overline{w}_{\bar z} + A_5(z)w + A_6(z)\overline{w}, \\
|Q_1(z)| + |Q_2(z)| \leqslant q_0, \quad |Q_3(z)| + |Q_4(z)| \leqslant q_0', \\
q_0 + q_0' < 1, \quad \|A_j(z)\|_{L_{p_0}(z)} \leqslant k_0 < +\infty \quad j = 1, \cdots, 7
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

适合如下边界条件

$$
\begin{cases}
\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(z)}\, w(z)] = r_1(z), \quad z \in \Gamma. \\
\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(z)}\, w_{\bar z} + \varepsilon\beta(z)w(t)] = r_2(z), \quad z \in \Gamma
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

的边值问题。其中 ε 为实参数。在边界条件（4.2）中，$|\lambda_j(z)| = 1$，$C_\nu^{2-j}(\lambda_j(z), \Gamma) \leqslant l_0$，$C_\nu^{2-j}(r_j(z), \Gamma) \leqslant l_0$，$j = 1.2$. $C_\nu(\beta(z), \Gamma) \leqslant l_1$，$0 < l_1 < +\infty$. $\frac{1}{2} < \nu < 1$. 以上边值问题仍简称问题A. $\kappa_j = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\lambda_j(z)$ $(j = 1.2)$ 仍为问题A的指数。当 $\kappa_j < N$ ($j = 1$ 或 2) 时，问题A不一定有解。按照 κ_j 的不同情况，如同 §2 一样引入变态边界条件和点型条件，并得到类似于 §2 的问题B与问题C.

先考虑复方程

$$L\hat{w}(z) = A_7(z)$$

适合边界条件

$$
\begin{cases}
\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(z)}\, \hat{w}(z)] = r_1(z) + h_1(z), \quad z \in \Gamma, \\
\mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(z)}\, \hat{w}_{\bar z}] = r_2(z) + h_1(z), \quad z \in \Gamma.
\end{cases}
$$

与适定性点型条件的边值问题，即问题 B_*. 由定理3.1，知当（4.1）中常数 q_0' 适当小时，问题 B_* 是可解的。然后考虑复方程

$$L\tilde{w} = H(z, w, w_{\bar z}, w_z)$$

适合边界条件

$$
\begin{cases}
\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(z)}\, \tilde{w}(z)] = h_1(z), \quad z \in \Gamma, \\
\mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(z)}\, \tilde{w}_{\bar z} + \beta(z)w(z)] = h_2(z), \quad z \in \Gamma.
\end{cases}
$$

与适定性点型条件的边值问题，即问题 C_*. 与问题 B_* 一样，问题 C_* 也是可解的，并且可以证明它的解是唯一确定的。记由 $w(z) \in C^1(\overline{G})$ 到 $\tilde{w}(z)$ 的映射为 $\tilde{w} = Rw$，则 R 为 $C^1(\overline{G})$ 上的一个线性有界的全连续算子。于是，下面的线性算子方程

$$w - \varepsilon Rw = \hat{w} \tag{4.3}$$

的解即为问题B的解。我们可以把 Fredholm 定理[8]用于方程（4.3），得到如下定理：

定理4.1 二阶线性复方程（4.1）问题B对几乎所有的参数值 ε 都是可解的，可能除去一个离散的数列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots (0 < |\varepsilon_1| \leqslant |\varepsilon_2| \leqslant \cdots)$ 它们是方程（4.3）相应齐次方程的特征值。

若 ε 是方程（4.3）相应齐次方程的秩为 q 的特征值，则方程（4.1）问题B有 $q - s$ 个可解条件。这里 s 是与 q, κ, κ_2, N 有关的常数。

证明从略。

本文是在我的导师闻国椿先生的指导和帮助下完成的，作者在此特表示诚挚的谢意。

参考文献

〔1〕 闻国椿、方爱农，二阶非线性椭圆型方程组的复形式与某些边值问题，数学年刊，2(1981)，201—216.

〔2〕 维库阿.依.湼，广义解析函数，人民教育出版社，1960年.

〔3〕 闻国椿、杨广武，二阶非线性椭圆型复方程的"黎曼-希尔伯特边值问题"，河北化工学院学报，1960年第2期，49—57.

〔4〕 Li Ming-zhong(李明忠), Generalized Riemann—Hilbert boundary value problem for a system of second order linear elliptic equations, *Scientic Sinica*, 23(1980), 280—298.

〔5〕 闻国椿，一阶复方程于多连通区域上的积分表示及其性质，河化师范大学学报(自然科学版)，1981.

〔6〕 闻国椿、李忠，非线性椭圆型复方程的函数论方法，1979年全国广义解析函数和边值问题会议资料.

〔7〕 Bers, L. and Schechter, M., Partial Differential Equations, 1964

〔8〕 廓尔莫果洛夫，A.H.，弗明，C.B.，函数论与泛涵分析初步，高等教育出版社，(1957).