关于二次 Hermite 插值的若干最佳估计*

段 奇
（山东工业大学）

令Δ：$a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 为$[a,b]$上的一个任意分划。$H(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上满足如下条件的分片二次 Hermite 插值函数：

1）$H(x_j)=f(x_j),H'(x_j)=f'(x_j),j=1,2,\cdots n$；2）$H(x)$在$[x_{j-1},x_{j-\frac{1}{2}}]$和$[x_{j-\frac{1}{2}},x_j]$ $(j=2,\cdots n)$上为二次式，此处$x_{j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_{j-1}+x_j)$；3）$H(x)\in C^1[a,b]$。

孙家昶[1]研究了此种类型的插值。为简单起见，我们不再叙述他们的结果。本文的目的在于对其结果进一步改进。利用 Peano 核定理，我们证明了

定理 1 如果$f(x)\in C^2[a,b]$，记$h=\max\limits_j h_j, h_j=x_j-x_{j-1}$，则有$\|f^{(\alpha)}(x)-H^{(\alpha)}(x)\|\leqslant C_\alpha h^{2-\alpha}\|f''\|,\alpha=0,1,2$。其中$C_0=\frac{1}{16}$，$C_1=\frac{1}{4}$，$C_2=\frac{9}{4}$。

通过构造一个特殊的函数序列，我们证明了：定理1中的系数C_α在某种意义下为最佳常数。

定理 2 定理1中的系数对所有$f(x)\in C^2[a,b]$和$[a,b]$上的所有分划而言是最佳的，即

$$C_\alpha=\sup_{f,\Delta}\frac{\|f^{(\alpha)}-H^{(\alpha)}\|}{\|f''\|h^{2-\alpha}},\quad \alpha=0,1,2.$$

由$H(x)\in C^1[a,b]$，因此$H''(x)$在$x_j(j=2,3,\cdots n-1)$和$x_{j-\frac{1}{2}}(j=2,3,\cdots n)$处可能有跳跃，此跳跃量能够描述成如下的

定理 3 如果$f(x)\in C^k[a,b](k=2,3)$，则$\|H''(x_j+)-H''(x_j-)\|$

$$\leqslant\begin{cases}\frac{5}{2}\omega(f'';h), & k=2^*;\\ \frac{5}{2}\|f''\|, & k=2;\\ \frac{1}{2}h\|f'''\|, & k=3.\end{cases}\quad 和\quad |H''(x_{j-\frac{1}{2}}+)-H''(x_{j-\frac{1}{2}}-)|\leqslant\begin{cases}\omega(f'';h), & k=2;\\ \frac{2}{3}h\|f'''\|, & k=3.\end{cases}$$

对定理3的系数，我们有

定理 4 在定理3中，除$k=2^*$的情况之外，所有的系数在与定理2类似的意义下均是最佳常数。

定理3、4的证明与定理1、2的证明是类似的。

$H''(x)$是$[a,b]$上的阶梯函数。由定理1的证明过程我们还得到了$H''(x)$的表达式。

定理 5 如果$f(x)\in C^2[a,b]$，当$x\in[x_{j-1},x_j]$时，

$$H''(x)=\begin{cases}\int_0^1 f''(x_{j-1}+h_jt)(3-4t)dt, & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_{j-\frac{1}{2}};\\ \int_0^1 f''(x_{j-1}+h_jt)(4t-1)dt, & x_{j-\frac{1}{2}}\leqslant x\leqslant x_j.\end{cases}$$

最后，顺便指出：利用定理5我们可以验证定理3中的若干结果。

参 考 文 献

[1] 孙家昶，样条函数与计算几何，科学出版社，1982。

*1984年3月27日收到。