第5卷 第1期 1985年1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.1 Jan. 1985

迁移理论中一类非线性积分方程的解的个数*

白锦东
(山东海洋学院)

一

在文献[1—3]里，讨论了迁移理论中一类非线性积分方程存在唯一解和多解的充分条件。本文将对方程

$$u(x)=\psi(x)+au(x)\int_0^1 \kappa(x,t)u(t)dt, \tag{1.1}$$

证明(i)方程(1.1)在实Banach空间L^1中有非负解的充要条件；(ii)对每一个固定的正数a，方程(1.1)在L^1中的非负解只能位于两个球面上；(iii)方程(1.1)存在多解的充分条件，它减弱了[1]中对$\psi(x)$的限制条件。

二

设$\psi(x)\in L^1=L^1[0,1]$，$\psi(x)\geqslant 0$。设$\kappa(x,t)$是定义在$0\leqslant x,t\leqslant 1$上的可测函数，并满足：(i)$0\leqslant\kappa(x,t)\leqslant 1$，(ii)$\kappa(x,t)+\kappa(t,x)=1$。

在L^1中定义算子T_ψ为

$$T_\psi u(x)=\psi(x)+au(x)\int_0^1\kappa(x,t)u(t)dt.$$

显然T_ψ是从L^1到L^1的有界连续算子[1]。方程(1.1)的解即算子T_ψ的不动点。

定理1 如果$a>0$，则方程(1.1)在空间L^1中的非负解只能在球面S_1和S_2上。

$$S_1=\left\{u\in L^1:\|u\|_1=\frac{1-\sqrt{1-2a\|\psi\|_1}}{a}\right\}.$$

$$S_2=\left\{u\in L^1:\|u\|_1=\frac{1+\sqrt{1-2a\|\psi\|_1}}{a}\right\}.$$

证 设$u(x)$是方程(1.1)在L^1中的一个非负解，则

$$\|u\|_1=\|\psi\|_1+a\int_0^1\int_0^1\kappa(x,t)u(t)u(x)dt\,dx=\|\psi\|_1+a\int_0^1\int_0^1[1-\kappa(t,x)]u(t)u(x)dtdx$$

$$=\|\psi\|_1+a\|u\|_1^2-a\int_0^1\int_0^1\kappa(t,x)u(t)u(x)\,dtdx,$$

*1982年3月27日收到.

于是

$$2\|u\|_1=2\|\psi\|_1+a\|u\|_1^2.\quad \|u\|_1=\frac{1\pm\sqrt{1-2a\|\psi\|_1}}{a}.$$ ∎

定理2　如果 $a>0$，则方程(1.1)在 L^1 中有非负解的充要条件是 $a\|\psi\|_1\leqslant\frac{1}{2}$.

证　必要性由定理1得到．下证充分性．记 Banach 空间 L^1 中的锥 $P(L^1)=\{u(x)\geqslant 0:u(x)\in L^1\}$．根据 B. Levi 定理[4]，$P(L^1)$ 是完全正则的，即

若 $u_n(x)\in P(L^1)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$，$u_1(x)\leqslant u_2(x)\leqslant\cdots\leqslant u_n(x)\leqslant u_{n+1}(x)\leqslant\cdots\cdots$，$\|u_n\|\leqslant M,(n=1,2,\cdots\cdots)$，则 $u_n\uparrow v\in P(L^1)$．当 $a\|\psi\|_1\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\|T_\psi\psi\|_1=\|\psi\|_1+\frac{a\|\psi\|_1^2}{2}\leqslant\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\|\psi\|_1\leqslant 2\|\psi\|_1$.

设 $\|T_\psi{}^k\psi\|_1\leqslant 2\|\psi\|_1$，则 $\|T_\psi{}^{k+1}\psi\|_1=\|\psi\|_1+\frac{a\|T_\psi^k\psi\|^2}{2}\leqslant\|\psi\|_1+2a\|\psi\|_1^2\leqslant 2\|\psi\|_1$

由归纳法知 $\|T_\psi^n\psi\|_1\leqslant 2\|\psi\|_1\leqslant\frac{1}{a}$，$(n=1,2,\cdots)$.

不难验证 $0\leqslant\psi(x)\leqslant T_\psi\psi(x)\leqslant\cdots\leqslant T_\psi{}^n\psi(x)\leqslant T_\psi{}^{n+1}\psi(x)\leqslant\cdots$.

由 $P(L^1)$ 是完全正则锥，有 $T_\psi{}^n\psi\uparrow u_1\in P(L^1)$．又因为 T_ψ 是连续的，容易证明 u_1 是算子 T_ψ 的不动点，即 $u_1(x)$ 是方程(1.1)的一个解． ∎

注1　[1]中要求 $a\|\psi\|_1\leqslant\frac{1}{4}$.

注2　因为 T_ψ 是 $P(L^1)$ 上的保序算子[1,5]（即增加算子），故 $u_1(x)$ 是方程(1.1)在 $P(L^1)$ 中的极小解．由定理1应有 $\|u_1\|_1=\frac{1-\sqrt{1-2a\|\psi\|_1}}{a}$．而且方程(1.1)在 S_1 上有唯一解 $u_1(x)$．事实上若 $u_{1'}(x)\in S_1$ 也是方程(1.1)的解，则 $u_{1'}(x)\geqslant u_1(x)$，$\|u_{1'}-u_1\|_1=0$，于是 $u_{1'}(x)=u_1(x)$.

注3　当 $a\|\psi\|_1=\frac{1}{2}$ 时，方程(1.1)在 L^1 中有唯一的非负解 $u_1(x)\in S_1=S_2$.

注4　[1]中定理1中 $[\psi,v]$ 上的极小解和极大解实际上是一个解，这可以从我们的定理1，注2，注3以及 $\|v\|_1=\frac{1+\sqrt{1-4a\|\psi\|_1}}{2a}\leqslant\frac{1}{a}$ 不难看出．

定理3　设 $\kappa(x,t)=\frac{\kappa(x)}{\kappa(x)+\kappa(t)}$ 并且 $1\geqslant\kappa(x)\geqslant x^n$，$\psi(x)\geqslant\delta\kappa^m(x)$，$(m,n$ 为正整数，$\delta>0)$，$a>0$，$a\|\psi\|_1<\frac{1}{2}$．则方程(1.1)至少有两个不同解．

定理3是[1]中定理2的改进．[1]中要求 $a\|\psi\|_1\leqslant\frac{1}{4}$，而且限制 $\psi(x)\geqslant r>0$．从[1]中定理2的证明不难看出，把条件"$a\|\psi\|_1\leqslant\frac{1}{4}$"减弱为"$a\|\psi\|_1<\frac{1}{2}$"，原证明中证明存在第二个解的方法仍然是可行的．下面我们将在此基础上证明定理3.

证　考虑方程

$$u(x)=T_{\psi+\varepsilon}u(x)=\psi(x)+\varepsilon+au(x)\int_0^1\kappa(x,t)u(t)dt. \tag{2.1}$$

当 $0<\varepsilon<\frac{1}{2a}-\|\psi\|_1$ 时，由 $\psi(x)+\varepsilon\geqslant\varepsilon>0$，方程(2.1)有两个不同解 $u_{1\varepsilon}(x)$ 和 $u_{2\varepsilon}(x)$，

考虑到我们的定理1，则应该有：

$$u_{1_\varepsilon}\in P(L^1)\cap S_{1_\varepsilon}=\left\{u(x)\in L^1:u(x)\geqslant 0,\ \|u\|_1=\frac{1-\sqrt{1-2a(\|\psi\|_1+\varepsilon)}}{a}\right\}$$

$$u_{2_\varepsilon}\in P(L^1)\cap S_{2_\varepsilon}=\left\{u(x)\in L^1:u(x)\geqslant 0,\ \|u\|_1=\frac{1+\sqrt{1-2a(\|\psi\|_1+\varepsilon)}}{a}\right\}.$$

$$u_{2_\varepsilon}(x)=\frac{1+\beta(\varepsilon)\kappa(x)}{1-\beta(\varepsilon)\kappa(x)}u_{1_\varepsilon}(x)，其中\ 0<\beta(\varepsilon)<1，并且有$$

$$a\int_0^1\frac{u_{1_\varepsilon}(x)}{1-\beta(\varepsilon)\kappa(x)}dx=1. \tag{2.2}$$

由定理2，$u_{1_\varepsilon}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}T^n_{\psi+\varepsilon}(\psi+\varepsilon)$。故，当 $0<\varepsilon<\varepsilon'<\frac{1}{2a}-\|\psi\|_1$ 时，

$$u_{1_{\varepsilon'}}(x)\geqslant u_{1_\varepsilon}(x)\geqslant\psi(x). \tag{2.3}$$

由(2.3)式易知，存在[0,1]上的 L-可测函数 $u_1(x)$，使得 $u_{1_\varepsilon}(x)\downarrow u_1(x)\ (\varepsilon\to+0)$，且满足

$$u_{1_\varepsilon}(x)\geqslant u_1(x)\geqslant\psi(x)\geqslant 0\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2a}-\|\psi\|_1\right).$$

故有 $u_1\in P(L^1)$。对等式 $u_{1_\varepsilon}(x)=T_{\psi+\varepsilon}u_{1_\varepsilon}(x)=\varepsilon+T_\psi u_{1_\varepsilon}(x)$ 两边取极限，得 $u_1(x)=T_\psi u_1(x)$。因此 $u_1(x)$ 是方程(1.1)的解而且 $u_1\in S_1$。从(2.2)式和(2.3)式容易得出

$$\beta(\varepsilon)\uparrow\beta_0\quad(当\ \varepsilon\to+0).$$

显然 $0<\beta_0\leqslant 1$。下面证明 $\beta_0<1$：若 $\beta_0=1$，由 **Fatou** 引理，

$$\int_0^1\frac{u_1(x)dx}{1-\kappa(x)}=\int_0^1\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{u_{1_\varepsilon}(x)}{1-\beta(\varepsilon)\kappa(x)}dx\leqslant\varliminf_{\varepsilon\to+0}\int_0^1\frac{u_{1_\varepsilon}(x)}{1-\beta(\varepsilon)\kappa(x)}dx=\frac{1}{a}$$

而
$$\int_0^1\frac{u_1(x)}{1-\kappa(x)}dx\geqslant\int_0^1\frac{\delta\kappa^m(x)}{1-\kappa(x)}dx=\delta\int_0^1\frac{\kappa^m(x)-1}{1-\kappa(x)}dx$$

$$+\delta\int_0^1\frac{1}{1-\kappa(x)}dx\geqslant-\delta m+\delta\int_0^1\frac{1}{1-x^n}dx=+\infty.$$

矛盾。因此 $\beta_0<1$。根据 **Lebesgue** 定理[4]，对下式两边取极限

$$u_{2_\varepsilon}(x)=\psi(x)+\varepsilon+au_{2_\varepsilon}(x)\int_0^1\kappa(x,t)u_{2_\varepsilon}(t)dt$$

得

$$u_2(x)=\psi(x)+au_2(x)\int_0^1\kappa(x,t)u_2(t)dt,$$

其中 $u_2(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}u_{2_\varepsilon}(x)=\frac{1+\beta_0\kappa(x)}{1-\beta_0\kappa(x)}u_1(x)$。即 $u_2(x)$ 是方程(1.1)的解，而且有

$$\|u_2\|_1=\frac{1+\sqrt{1-2a\|\psi\|_1}}{a}.$$

故 $u_2\in S_2$，$u_2\neq u_1$。　　▮

参考文献

[1] 刘清荣，在迁移理论中一类非线性积分方程的极大解和极小解，科学通报，1(1982)，4—8.
[2] Hively, G. A., On a class of nonlinear integral equations arising in transport theory, *SIAM J. Math. Anal.*, 9(1978), 787—792.
[3] Leggett, R. W., *SIAM J. Math. Anal.*, 7(1976), 542—550,
[4] 江泽坚，吴智泉，实变函数论，北京，1978.
[5] Amann, H., Fixed Point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM. Review*, 8(1976), 620—709.

The Number of Solutions of Equation which is a Class of the Nonlinear Integral Equation Arising in Transport Theory

Bai Jindong
(Shandong college of oceanology)

Abstract

Consider the nonlinear integral equation arising in transport theory

$$u(x)=\psi(x)+au(x)\int_0^1 \kappa(x,t)u(t)\,dt, \tag{1.1}$$

where $\psi(x)\in L^1$, $\psi(x)\geqslant 0$, a is a real parameter and $\kappa(x,t)$ a Lebesgue measurable function on $[0,1]\times[0,1]$ and satisfies (i) $0\leqslant\kappa(x,t)\leqslant 1$, (ii) $\kappa(x,t)+\kappa(t,x)=1$.

The existence of unique solution and multiple solutions of the equation (1.1) has been studied in the paper [1—3]. The main purpose of the present paper is to continue this study. Our main results are the following

Theorem 1 Let $a>0$. Then the non-negative solutions of the equation (1.1) in L^1 are only on the spheres S_1 and S_2.

$$S_1=\left\{u\in L^1:\|u\|_1=\frac{1-\sqrt{1-2a\|\psi\|_1}}{a}\right\}.$$

$$S_2=\left\{u\in L^1:\|u\|_1=\frac{1+\sqrt{1+2a\|\psi\|_1}}{a}\right\}.$$

Theorem 2 Let $a>0$. Then the equation (1.1) has non-negative solutions in L^1 if and only if $a\|\psi\|_1\leqslant\frac{1}{2}$.

Theorem 3 Let $\kappa(x,t)=\dfrac{\kappa(x)}{\kappa(x)+\kappa(t)}$. Suppose $1\geqslant\kappa(x)\geqslant x^n$, $\psi(x)\geqslant\delta\kappa^m(x)$ (m, n are positive integers, $\delta>0$), $a>0$ and $a\|\psi\|_1<\frac{1}{2}$. Then the equation (1.1) has at least two different solutions.