第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1984

多项式系在Non-Carathéodory区域中的完备性*

莫国端

（上海市闸北区教育学院）

设D为单位圆$|z|<1$与直线段$[-1,0]$的差集，它是一个典型的非Carathéodory区域。以$d=d(z)$表示点z到直线段$[-1,0]$的距离。А.Л.Шагинян[1]证明了：对于任意的在D内解析、$\bar{D}$上连续的函数$f(z)$，存在多项式序列$\{Q_n(z)\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in D}\exp\left[-\exp\left(\frac{A}{d}\log\frac{1}{d}\right)\right]|f(z)-Q_n(z)|=0.$$

其中A为常数，作者在北京大学读书时曾将$\frac{A}{d}\log\frac{1}{d}$改进为$\frac{5}{d}$。本文目的是给出这一问题的充要条件。

设$K(t)$是定义于$(0,10)$内的正函数，$K(t)\nearrow\infty\ (t\to0)$且

$$\lim_{t\to0}\frac{d\log K(t)}{d\log\frac{1}{t}}=\rho,\quad 0<\rho<\infty. \tag{1}$$

设

$$h(z)=e^{-e^{K(\pi-|\theta|)}},\quad z=re^{i\theta},\quad |\theta|<\pi \tag{2}$$

（如果以$K(d)$代替$K(\pi-|\theta|)$，下面一切结果相同）。

以$C_h(D)$表示这样的函数族：如果$f(z)\in C_h(D)$，那么$f(z)$在D内解析，$\bar{D}$上除了$[-1,0]$外连续，且

$$\lim_{Z\to Z_0\in[-1,0]}h(z)f(z)=0. \tag{3}$$

我们称函数系$\{Q(z)\}$在$C_h(D)$中是完备的，如果

$$\inf_{\{Q\}}\sup_{z\in D}h(z)|f(z)-Q(z)|=0,\quad f\in C_h(D). \tag{4}$$

定理 设函数$K(t)$满足条件(1)，那么多项式系在$C_h(D)$中完备的充分必要条件是

$$\int_0^1K(t)dt=\infty. \tag{5}$$

我们对函数$f(z)$所加的一切条件也是必要的。

推论 （参考[5,6]）设$f(z)$在D内解析，且

$$\iint_D h(z)|f(z)|^p dxdy<\infty,\quad p<0$$

那么等式

---

* 1982年4月28日收到。

$$\inf_{\{Q\}}\iint_D h(z)\,|f(z)-Q(z)|^p dxdy=0,\ \ p<0$$

成立的充分必要条件是积分(5)发散。

引理 1　设 $P(\theta)=P(|\theta|)$ 为 $(-\pi,\pi)$ 内的正函数，$P(\theta)\nearrow\infty\ (|\theta|\to\pi)$。函数 $h_1(z)=e^{-P(\theta)}$，$z=re^{i\theta}$，$|\theta|\leqslant\pi$。那么对于 $0<\alpha<1$，z^α 的多项式系在 $C_{h_1}(D)$ 中是完备的。

证　令 $w=\sqrt[3]{z}$ 将 D 变换为 D_1：$|w|<1$，$|\varphi|<\frac{\pi}{3}\ (w=re^{i\varphi})$。设 $F(w)=f(w^3)$。则 $F(w)$ 在 D_1 内解析，$\bar{D}_1$ 上除了原点及 $\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$ 外连续。但对于 $w_0=0$ 或 $\arg w_0=\pm\frac{\pi}{3}$，由(3)，

$$\lim_{w\to w_0} e^{-P(3\varphi)}F(w)=0,\ \ w=re^{i\varphi}. \tag{6}$$

因此，对于 $\varepsilon>0$，存在 $\varphi_0>0$ 使得 $w\in D_1\cap\left(\varphi_0\leqslant|\varphi|<\frac{\pi}{3}\right)$时

$$e^{-P(3\varphi)}|F(w)|<\varepsilon. \tag{7}$$

因为

$$\varlimsup_{w\to0,|\varphi|\leqslant\varphi_0}|F(w)|\leqslant\varlimsup_{w\to0,|\varphi|\leqslant\varphi_0}e^{P(3\varphi_0)-P(3\varphi)}|F(w)|=0, \tag{8}$$

于是 $F(w)$ 在 $\bar{D}_1\cap(|\varphi|\leqslant\varphi_0)$ 上连续。同时由(8)，存在 $r_0>0$，使

$$|F(w)|<\varepsilon,\ \ w\in(|w|\leqslant r_0)\cap(|\varphi|\leqslant\varphi_0). \tag{9}$$

对于 $\delta>0$，以 D_1^δ 表示区域：

$$|\arg w|<\frac{\pi}{3},\ \ |\arg(w-\delta)|>\frac{\pi}{3},\ \ |w|<1. \tag{10}$$

由(7)及(9)，当 δ 充分小时

$$e^{-P(3\varphi)}|F(w)|<\varepsilon,\ \ w\in D_1^\delta. \tag{11}$$

设 $w_n=\frac{n}{n+1}w+\frac{\sigma}{n+1}\ (0<\sigma<1)$。易证当 $w\in D_1$ 时，$w_n\in D_1$，且在 D_1 中一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=w$。因 $F(w)$ 在 $\overline{(D_1-D_1^{\delta/2})}$ 上一致连续，存在充分大的 n，使得当 $w\in\overline{(D_1-D_1^{\delta/2})}$ 时，

$$e^{-P(3\varphi)}|F(w)-F(w_n)|<2\varepsilon. \tag{12}$$

易证 $|\varphi_n|\leqslant|\varphi|$，于是 $e^{-P(3\varphi)}\leqslant e^{-P(3\varphi_n)}$。于是当 $w\in D_1^{\delta/2}$，对于充分大的 n，不等式(12)左边小于

$$e^{-P(3\varphi)}|F(w)|+e^{-P(3\varphi_n)}|F(w_n)|<2\varepsilon.$$

于是不等式(12)在 D_1 上一致成立。

因为 $F(w_n)$ 在 $\bar{D}_1$ 上解析，存在多项式 $Q_1(w)$ 使

$$e^{-P(3\varphi)}|F(w_n)-Q_1(w)|<\varepsilon,\ \ w\in\bar{D}_1.$$

将此不等式与(12)比较，并注意 $w=z^{1/3}$，我们有

$$e^{-P(\theta)}|f(z)-Q_1(z^{1/3})|<3\varepsilon,\ \ z\in D. \tag{13}$$

下面只要利用变换 $s=z^\alpha$，以 $Q(z^\alpha)$ 逼近 $Q_1(z^{1/3})$ 就有

$$e^{-P(\varphi)}|f(z)-Q(z^\alpha)|<4\varepsilon,\ \ z\in D, \tag{14}$$

引理 1 证毕。

现设 $K(t)$ 满足条件(1)。正数 $\sigma<1$。对于 $x_0\in[-1,\ -\sigma]$，以 $E^{\lambda}_{x_0}$ 表示点集：

$$|z-x_0|\leqslant\lambda,\quad \left|\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right|\leqslant t^{2s}\quad (z-x_0=te^{i\varphi},\quad |\varphi|\leqslant\pi).$$

其中 s 为大于 ρ 的整数。显然直线段

$$[x_0-i\lambda,\ x_0+i\lambda]\subset E^{\lambda}_{x_0}.$$

引理 2　对于任意的 $c>0$，存在函数 $G^{+}_{x_0}(z)$ 及 $G^{-}_{x_0}(z)$，在 $z\neq x_0$ 处解析，而且当 λ 充分小时，对于 $a>3\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{2\rho}$，$b<2^{-2\rho}/3$，

$$e^{-e^{acK(\pi-\theta)}}<|G^{+}_{x_0}(re^{i\theta})|<e^{-e^{bcK(\pi-\theta)}}\tag{15}$$

$$z=re^{i\theta}\in E^{\lambda}_{x_0},\quad 0<\theta<\pi$$

$$e^{-e^{acK(\pi-|\theta|)}}<|G^{-}_{x_0}(re)^{i\theta})|<e^{-e^{bcK(\pi-|\theta|)}}\tag{16}$$

$$z=re^{i\theta}\in E^{\lambda}_{x_0},\quad -\pi<\theta<0.$$

证　对于任意大于 ρ 的整数 s，令 $\rho_1(t)=\log K(t^{-\frac{1}{s}})/\log t$，则由(1)，

$$\lim_{t\to\infty}\rho_1(t)=\rho_1=\frac{\rho}{s}<1,\quad \lim_{t\to\infty}t\rho_1'(t)\log t=0.\tag{17}$$

取正数序列$\{a_n\}$，使它在 $|z|\leqslant t$ 上的个数满足

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(t)}{t^{\rho_1(t)}}=\frac{C\sin\rho_1\pi}{\pi}.$$

命 $g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a_n}\right)$。则 $g(z)$ 是一个整函数。由(17)及[3]，88页定理25，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log g(te^{i\theta})}{t^{\rho_1(t)}}=ce^{i\rho_1\theta},\quad |\theta|<\pi.$$

命

$$g_{x_0}(z)=g(e^{\frac{\pi si}{2}}/(z-x_0)^s)=g(e^{is(\frac{\pi}{2}-\varphi)}/t^s),\quad z=x_0+te^{i\varphi}.\tag{18}$$

按 $\rho_1(t)$ 的定义，$K(t^{-1})=t^{s\rho_1(t^s)}$，我们有

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log|g_{x_0}(x_0+te^{i\varphi})|}{K(t)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log|g(r^se^{is(\frac{\pi}{2}-\varphi)})|}{r^{s\rho_1(r^s)}}$$

$$=C\cos\rho_1 s\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),\qquad \left|s\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right|<\pi.$$

因此当 t 及 $\left|\frac{\pi}{2}-\varphi\right|$ 充分小时，

$$e^{\frac{c}{2}K(t)}<|g_{x_0}(z)|<e^{2cK(t)},\quad z=x_0+te^{i\varphi}.\tag{19}$$

因为

$$|\arg g_{x_0}(z)|=\left|\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{e^{is(\frac{\pi}{2}-\varphi)}}{a_nt^s}\right)\right|=\left|\operatorname{Im}\int_{a_1}^{\infty}\log\left(1+\frac{e^{is(\frac{\pi}{2}-\varphi)}}{\tau t^s}dn(\tau)\right|$$

$$=\left|\int_{a_1}^{\infty}\frac{t^s\sin s\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)n(\tau)\,d\tau}{t^{2s}\tau^2+1+2\tau t^s\cos s\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\right|\leqslant Mt^{-s}\left|\sin s\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right|\leqslant Ms\left|\frac{\pi}{2}-\varphi\right|t^{-s},$$

于是当 λ 充分小时由 $E^{\lambda}_{x_0}$ 的定义，$\left|\frac{\pi}{2}-\varphi\right|\leqslant t^{2s}\leqslant\lambda^{2s}$ 得

$$|\arg g_{x_0}(z)| \leqslant Mst^s \leqslant Ms\lambda^s < \lambda^{\frac{1}{2}}, \quad z \in E^{\lambda}_{x_0}. \tag{20}$$

命 $G^+_{x_0}(z) = e^{-g_{x_0}(z)}$，则当 $z \neq x_0$ 时 $G^+_{x_0}(z)$ 是解析的，且由

$$|G^+_{x_0}(z)| = e^{-|g_{x_0}(z)|\cos(\arg g_{x_0}(z))}$$

以及(19)和(20)，当 λ 充分小时，

$$e^{-e^{3cK(t)}} < |G^+_{x_0}(z)| < e^{-e^{\frac{c}{3}K(t)}}, \quad z = E^{\lambda}_{x_0}, \quad t = |z - x_0|. \tag{21}$$

当 $z = x + iy \in E^{\lambda}_{x_0}$ 时，$|x - x_0| = t|\cos\varphi| \leqslant t|\sin\varphi| \leqslant |y|$，于是只要 λ 充分小，

$$t = |z - x_0| \leqslant |y| + |x - x_0| \leqslant 2|y| = 2r|\sin(\pi - |\theta|)| \leqslant 2(\pi - |\theta|),$$

$$t = |z - x_0| > |y| = r\sin(\pi - |\theta|) \geqslant \frac{2\sigma}{\pi}(\pi - |\theta|).$$

于是由 $K(t)$ 的单调性得

$$K[2(\pi - |\theta|)] \leqslant K(t) \leqslant K\left[\frac{2\sigma}{\pi}(\pi - |\theta|)\right], \quad z = re^{i\theta} \in EE^{\lambda}_{x_0}. \tag{22}$$

由(1)，对于 $\mu > 0$ 易得

$$K(\mu t)/K(t) \to \mu^{-\rho}, \quad t \to 0, \tag{23}$$

由（22）及（23），当 λ 充分小时

$$2^{-2\rho}K(\pi - |\theta|) < K(t) < \left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)^{2\rho} K(\pi - |\theta|), \quad z \in E^{\lambda}_{x_0}. \tag{24}$$

不等式(21)及(24)给出不等式(15)。而(16)只要在（18）中以 $e^{-\frac{s\pi i}{2}}$ 代替 $e^{\frac{s\pi i}{2}}$ 就得。引理2证毕。

定理充分性的证明

由引理1，不妨设 $f(z) = \sqrt{z}$。对于 $\varepsilon > 0$，存在 $\sigma > 0$，使

$$h(z)\,|f(z) - \sqrt{z + \sigma}| < \varepsilon, \qquad z \in D \tag{25}$$

固定 σ。在引理2中取 $c = \frac{1}{6}\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{2\rho}$，并假定 λ_0 充分小，使得当 $-1 \leqslant x_0 \leqslant -\frac{\sigma}{2}$ 时一致地有

$$e^{-e^{\frac{1}{2}K(\pi - |\theta|)}} < |G^+_{x_0}(z)| < e^{-e^{\nu K(\pi - |\theta|)}}, z \in E^{\lambda_0}_{x_0}, 0 < \theta < \pi, \tag{26}$$

$$e^{-e^{\frac{1}{2}K(\pi - |\theta|)}} < |G^-_{x_0}(z)| < e^{-e^{\nu K(\pi - |\theta|)}}, z \in E^{\lambda_0}_{x_0}, -\pi < \theta < 0. \tag{27}$$

其中 $\nu = \frac{1}{18}\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{2\rho}$.

设 D_0 是圆 $|z| < 2$ 与直线 $[-2, -\sigma]$ 的差集。按 $K(t)$ 的条件，特别是积分(5)发散，按已知定理([2]，41—42页)，存在多项式 $Q_n(z)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_0} e^{-\nu K(\pi - |\theta|)}\,|\sqrt{z+\sigma} - Q_n(z)|^2 dxdy = 0.$$

设 $D^{\frac{\lambda_0}{2}}$ 为 $\bar{D}$ 中到 $[-1, -\sigma]$ 的距离 $\leqslant \frac{\lambda_0}{2}$ 的点集。则当 n 充分大时，

$$h(z)\,|\sqrt{z+\sigma} - Q_n(z)| < \varepsilon, \quad z \in (D - D^{\frac{\lambda_0}{2}}). \tag{28}$$

设 $z_0=x_0+iy_0$，$|y_0|>0$ 为 $D^{\frac{\lambda_0}{2}}$ 中任意一点．不妨设 $\lambda_0\leqslant\sigma$，$y_0>0$．以 K_{z_0} 表示圆 $|z-z_0|\leqslant y_0^{4s}$，其中 s 是 $E^{\lambda}_{x_0}$ 的定义中的参数．易证当 λ_0 充分小时 $K_{z_0}\subset E^{\lambda_0}_{x_0}$．

设 $l(z)=G^{+}_{x_0}(z)(\sqrt{z+\sigma}-Q_n(z))^2$．则 $l(z)$ 在 K_{z_0} 上解析，故

$$|l(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|l(z_0+te^{i\theta}|d\theta,\quad 0\leqslant t\leqslant y_0^{4s}.$$

在此式两边乘以 t 并对 t 从 0 到 y_0^{4s} 积分，然后利用(26)得

$$\frac{1}{2}y_0^{8s}|l(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K_{z_0}}|l(z|dxdy\leqslant\iint\limits_{K_{z_0}}e^{-e^{\nu K(\pi-|\theta|)}}|\sqrt{z+\sigma}-Q_n(z)|^2dxdy$$

$$\leqslant\iint\limits_{D_0}<\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

故有

$$y_0^{4s}|G^{+}_{x_0}(z_0)|^{\frac{1}{2}}|\sqrt{z_0+\sigma}-Q_n(z_0)|<\varepsilon,\quad z_0\in D^{\frac{\lambda_0}{2}}. \tag{29}$$

由(26)的第一个不等式易得 $y_0^{4s}|G^{+}_{x_0}(z_0)|^{\frac{1}{2}}>h(z_0)$．于是对于 $0<y_0\leqslant\frac{\lambda_0}{2}$，当 λ_0 充分小时由(29)得

$$h(z_0)|\sqrt{z_0+\sigma}-Q_n(z_0)|<\varepsilon,\quad z_0\in D^{\frac{\lambda_0}{2}}. \tag{30}$$

类似地当 $y_0<0$ 时此式同样成立．把(28)及(30)与(25)比较得

$$h(z)\ |f(z)-Q_n(z)|<2\varepsilon.$$

定理充分性证毕．

定理必要性的证明由下面引理给出：

引理 3　设 $0<\sigma<1$．以 D_σ 表示圆 $|z|<1$ 与 $[-1,-\sigma]$ 的差集．在定理的条件下，如果积分(5)收敛，那么任何在 D_σ 内解析的函数系 $\{g_n(z)\}$ 在 $C_h(D)$ 中都是不完备的．

证　因为 $tK'(t)<0$，故当积分(5)收敛时，函数

$$\mu(t)=\frac{20}{\pi}\int_0^t(-\tau K'(\tau))d\tau \tag{31}$$

非负，有界，严格单调上升，连续可微，$\mu(0)=0$，且有反函数 $t=\omega(\mu)$．设 $D^*_{\frac{\sigma}{2}}$ 是 $\bar{D}$ 内部的一个单连通区域，线段 $\left(-\frac{\sigma}{2},0\right]\subset D^*_{\frac{\sigma}{2}}$，并且点 $z=-\frac{\sigma}{2}$ 是 $D^*_{\frac{\sigma}{2}}$ 的边界点，$D^*_{\frac{\sigma}{2}}$ 的边界由可求长约当曲线组成，且在 $z=-\frac{\sigma}{2}$ 附近有展式

$$\varphi_+=\frac{\omega(s)}{s},\quad \varphi_-=-\frac{\omega(s)}{s},\quad \left(z+\frac{\sigma}{2}=se^{i\varphi}\right).$$

因为 $K(t)\nearrow\infty\ (t\to 0)$，故

$$\lim_{s\to 0}\frac{\omega(s)}{s}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\mu(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\mu'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\pi/20}{K(t)\mathrm{dlog}K(t)/\mathrm{dlog}\frac{1}{t}}=0,$$

$$\lim_{s\to 0}\omega'(s)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\mu'(t)}=0.$$

故

$$\lim_{s\to 0}s\frac{d\varphi_+}{ds}=\lim_{s\to 0}s\frac{d\varphi_-}{ds}=0. \tag{32}$$

设 $\Delta(s)=\varphi_+-\varphi_-=2\frac{\omega(s)}{s}$. 利用积分替换 $s=\mu(t)$，注意(1)及积分(5)收敛得

$$\int_D s\left(\frac{d\varphi_+}{ds}\right)^2\frac{ds}{\Delta s}<\infty,\quad \int_D s\left(\frac{d\varphi_-}{ds}\right)^2\frac{ds}{\Delta(s)}<\infty. \tag{33}$$

设 $w(z)$ 将$\bar{D}^*_{\frac{\sigma}{2}}$保形映射为 $|w-1|\leqslant 1$，　$w\left(-\frac{\sigma}{2}\right)=0$. 则由(32)及(33)，按已知定理([4]，328页)，在 $z=-\frac{\sigma}{2}$附近有

$$|w(z)|=A(z)e^{-\pi\int_s^a\frac{dt}{t\Delta(t)}}=A(z)\ e^{-\frac{\pi}{2}\int_s^a\frac{dt}{\omega(t)}} \tag{34}$$

其中 $0<\alpha\leqslant A(z)\leqslant\beta<\infty$.

令 $G(z)=\exp[-(w(z))^{-\frac{1}{8}}]$，则 $G(z)$ 在 $D^*_{\frac{\sigma}{2}}$内解析. 由(34)，

$$\int_s^a\frac{dt}{\omega(t)}=\int_{\omega(s)}^{\omega(a)}\frac{\mu'(t)}{t}dt=-\frac{20}{\pi}\int_{\omega(s)}^{\omega(a)}K'(t)dt=\frac{20}{\pi}K[\omega(s)]+O(1).$$

从而有

$$|G(z)|=O(1)\exp[-|\omega(z)|^{-\frac{1}{8}}\cos(\arg\omega(z)^{-\frac{1}{8}})]$$

$$=O(1)\exp\left[-|w(z)|^{-\frac{1}{8}}\cos\frac{\pi}{4}\right]=O(1)\exp\left[-\exp\left(\frac{10}{9}K(\omega(s))\right)\right]. \tag{35}$$

因在 $z=-\frac{\sigma}{2}$的邻域之外 $K[\omega(s)]$有界，故认为(35)在 $D^*_{\frac{\sigma}{2}}$上成立.

设 $\Gamma_{\frac{\sigma}{2}}$为 $D^*_{\frac{\sigma}{2}}$ 的边界. 由于在 $z=-\frac{\sigma}{2}$附近的 $\Gamma_{\frac{\sigma}{2}}$上有 $r\sin\theta\sim\omega(s)$，故 $\omega(s)\leqslant\pi-|\theta|$. 由(35)，

$$|G(z)|\leqslant M\exp[-\exp K(\pi-|\theta|)]=Mh(z),\quad z\in\Gamma_{\frac{\sigma}{2}}. \tag{36}$$

如果$\{g_n(z)\}$在 $C_h(D)$ 中完备，那么存在 $g_n(z)$ 的有限线性组合 $G_n(z)$，使

$$h(z)|G_n(z)|\leqslant M_1,\quad z\in D. \tag{37}$$

函数 $G_n(z)G(z)$ 在 $D^*_{\frac{\sigma}{2}}$内解析，$\bar{D}^*_{\frac{\sigma}{2}}$上连续，由(36)及(37)，当 $z\in\Gamma_{\frac{\sigma}{2}}$时，

$$|G(z)G_n(z)|\leqslant M_2, \tag{38}$$

由最大模原理，此不等式在 $\bar{D}^*_{\frac{\sigma}{2}}$上成立.

设 F 为 $D^*_{\frac{\sigma}{2}}$内任一闭集，由于$G(z)$在 F 上有大于0的下界，故由(38)，$|G_n(z)|\leqslant M_F$，$z\in F$. 由 Montel 定理，$\{G_n(z)\}$ 存在一子列，在 $D^*_{\frac{\sigma}{2}}$ 内部收敛于某解析函数 $G_0(z)$. 但这

一子列在D内收敛于$f(z)$，故$f(z)$可以解析开拓到$D^*_{\frac{1}{2}}$内。这一般说来是不可能的（例如$f(z)=\sqrt{z}$）。证毕。

参 考 文 献

[1] Шагинян, А. Л., О полноте Семейств аналитических функций в комплексной области Сообщ ИН-ТА, Матем и Мех, АН Арм ССР вир 1 (1947), 1—59.

[2] Мергелян, С. Н., О полноте Систем аналитических функций, Y. M. H. VIII ввп 4(56) (1953), 3—63.

[3] Левин, Б. Б., Распраделение Корней целнх функций, Москва, 1956.

[4] Warschawzhi, S., On conformal mapping of infinte strips, *Trans. Am. M. Soc* 51, №2 (1942), 280—335.

[5] Мергелен С. Н., Равномерные приближения функций Комплексного переменнго, *Y. M. H, СССР*, 7 вип 2 (48) (1952), 31—122.

[6] Brennan E., James, Approximation in the mean by polynomials on non-Carathèodory domains, *Ark. Mat.* 15(1977), №1, 117—168.

[7] Jacob Burbea, Polynomial approximation in Bers spaces of non-Caratheodory domains, *Ark. Mat.* Vol 16 (1978), 229—234.

On Completeness of the Polynomial System on Non-Carathéodory Domains

Mo Guoduan

(Zhabei College for Theacher Advanced Studies, Shanghai)

Abstract

Let D be a Jordan domain with a number of cuts, *e. g.* the unit disk with the segment $[-1,0]$ deleded. Let $K(t)$ is a positive function in $(0,10)$ to satisfy $K(t) \nearrow\infty\ (t\to 0)$ and

$$\lim_{t\to 0} d\log K(t)/d\log\frac{1}{t}=\rho,\quad 0<\rho<\infty.$$

Let

$$h(z)=\exp[-\exp K(\pi-|\theta|)],\quad z=re^{i\theta},\quad |\theta|<\pi$$

or $$h(z)=\exp[-\exp K(\delta)]$$
where $\delta=\delta(z)$ be the distance from a point z to the segment $[-1,0]$.

Let $C_h(D)$ be collection of function $f(z)$ to be analytic in D and continuous in $\bar{D}$ except the segment $[-1,0]$ and

$$\lim_{z\to z_0\in[-1,0]} h(z)f(z)=0.$$

We call a function system $\{Q(z)\}$ complete in $C_h(D)$, if

$$\inf_{\{Q\}}\sup_{z\in D} h(z)\,|f(z)-Q(z)|=0, \text{ for } f(z)\in C_h(D).$$

Theorem The polynomial system $\{Q(z)\}$ is complete in $C_h(D)$, if and only if

$$(*)\qquad \int_0 K(t)\,dt=\infty.$$

All conditions of the function $f(z)$ are also necessary.

Corollary The polynomials are complete in $L_h^p(D)$ $(p>0$, in the mean by area) if and only if the integral $(*)$ be divergent.