第5卷 第1期 数学研究与评论 Vol.5 No.1
1985年1月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Jan. 1985

关于联合最佳逼近的一些结果*

陈天平
（复旦大学）

不少作者讨论了联合最佳逼近问题，给出各种情况下的存在性、唯一性以及特征定理（参见[2]—[6]）。然而，这些工作有一定的局限性。

本文给出这类问题的一般定义。指出这类联合最佳逼近在一些常见的空间中，实际上是二元最佳逼近问题。因此，利用最佳逼近理论以及连续线性泛函的表示定理很容易得到联合最佳逼近的结果。

设 $(X,\ B,\ \mu)$ 是 σ- 有限测度空间，$(Y,\ B^*,\ \nu)$ 是满足 $\nu(Y)=1$ 的测度空间，$f(x,y)$ 是 $(X\times Y,\ B\times B^*,\ \mu\times\nu)$ 上的可测函数，U 是 X 上实值函数按范数 $\|\cdot\|_U$ 构成的线性赋范空间，V 是 Y 上实值函数按范数 $\|\cdot\|_V$ 构成的线性赋范空间，且满足对几乎处处 $y\in Y$，$f(x,\ y)\in U$，$\|f(x,\ y)\|_U\in V$。G 是 U 中某子集，$f(x,\ y)$ 关于 G 的联合最佳逼近是求 $h_0\in G$，满足

$$\|\|f(x,y)-h_0(x)\|_U\|_V=\inf_{h\in G}\|\|f(x,y)-h(x)\|_U\|_V.$$

这种 h_0 称为 $f(x,\ y)$ 的$[G,\ U,\ V]$联合最佳逼近。

最有兴趣的是 $U=L_{p_1}(X)$，$V=L_{p_2}(Y)$ $(1\leqslant p_1,\ p_2<\infty)$。我们有下述

定理A 满足下述条件

$$\|\|f(x,y)\|_{L_{p_1}(X)}\|_{L_{p_2}(X)}<\infty$$

的函数全体成一 Banach 空间。它的共轭空间当 $1<p_1,\ p_2<\infty$ 时是满足

$$\|\|g(x,y)\|_{L_{q_1}(X)}\|_{L_{q_2}(Y)}<\infty$$

的函数全体，这里 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$，$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=1$；当 $1<p_1<\infty$，$p_2=1$ 时是满足

$$\operatorname*{ess.sup}_{y}\|g(x,y)\|_{L_{q_1}(x)}<\infty$$

的函数全体；当 $p_1=p_2=1$ 时，是满足

$$\operatorname*{ess.sup}_{x,y}|g(x,y)|<\infty$$

的函数全体。

把上述函数空间记为 $(L_{p_1}(X);\ L_{p_2}(Y))$。容易看出，把 $L_{p_1}(X)$ 中子集G看成$(L_{p_1}(X);\ L_{p_2}(Y))$ 中的子集 G^*：$h(x)\in G\Rightarrow h^*(x,\ y)=h(x)$（一切 $y\in Y$）。上述的联合最佳逼近就是 G^* 对于 $f(x,\ y)$在 $(L_{p_1}(X),\ L_{p_2}(Y))$中的最佳逼近问题。

引理 设 S 是一个线性赋范空间，$F(F\neq S)$ 是 S 中一个凸子集。$u_0\in F$ 是元素 $x\in S\backslash F$ 的最佳逼近元的充分必要条件是存在满足下述条件的线性连续泛函 φ_0：

---

*1983年1月3日收到。

(1) $\|\varphi_G\|=1$, (2) $\|x-x_0\|=\varphi_0(x-x_0)$, (3) $\varphi_0(u_0)=\sup\limits_{u\in F}\varphi_0(u)$.

由是，我们立即得到下述

定理1 设G是$L_1(X)$中一个凸集．$h_0\in G$是$f(x,y)$的$[G,L_1(X),L_1(Y)]$联合最佳逼近的充要条件是对一切$h\in G$，成立着

$$\int_{Y\times X}(h(x)-h_0(x))\mathrm{sign}(f(x,y)-h_0(x))\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

$$\leqslant\int_{Z(f(x,y)-h_0(x))}|h(x)-h_0(x)|\,d\mu(x)\,d\nu(y),$$

其中$Z(f(x,y)-h_0(x))=\{(x,y)\mid(x,y)\in X\times Y,\ f(x,y)=h_0(x)\}$.

定理2 设G是$L_{p_1}(X)$中凸子集$(1<p_1<\infty)$．$h_0\in G$是$f(x,y)$的$[G,L_{p_1}(X),L_{p_2}(Y)]$的联合最佳逼近$(1\leqslant p_2<\infty)$的充要条件是对一切$h\in G$成立着

$$\int_Y\left\{\int_X|f(x,y)-h_0(x)|^{p_1}d\mu(x)\right\}^{\frac{p_2}{p_1}-1}\int_X|f(x,y)-h_0(x)|^{p_1-1}\mathrm{sign}(f(x,y)-h_0(x))(h(x)-h_0(x))\,d\mu(x)\,d\nu(y)\leqslant0.$$

当$p_1=1$，$1<p_2<\infty$时，充要条件为

$$\int_Y\left\{\int_X|f(x,y)-h_0(x)|\,d\mu(x)\right\}^{p_2-1}\int_X\mathrm{sign}(f(x,y)-h_0(x))(h(x)-h_0(x))\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

$$\leqslant\int_Y\left\{\int_X|f(x,y)-h_0(x)|\,d\mu(x)\right\}^{p_2-1}\int_{Z(f(x,y)-h_0(x))}|h(x)-h_0(x)|\,d\mu(x)\,d\nu(y).$$

文献[5]中讨论的联合最佳逼近是$Y=\{1,2,3,\cdots,\}$当$p_1=p_2$时的特殊情形．因此，不仅可得到[5]中的有关结果并推广了其中的结果．

若记$\bar f(x)=\dfrac{1}{\nu(Y)}\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$，我们有

定理3 $g^*\in G$是$f(x,y)$的$[G,L_2(X),L_2(Y)]$的联合最佳逼近的充要条件是g^*是$\bar f$在$L_2(X)$中的最佳逼近．

若X是紧的，$C(X)$为其上连续函数全体．记

$$\|f(x)\|_{C(X)}=\max_X|f(x)|.$$

我们有

定理4 若对任何$g\in G$，任何$y\in Y$，$\|\bar f-f\|_{C(X)}\leqslant\|\bar f-g\|_{C(X)}$，则如$g^*\in G$是$\bar f$在$C(X)$中的最佳逼近．那么，$g^*$也是$f(x,y)$的$[G,L'(Y),C(x)]$意义下的联合最佳逼近．

[6]中的联合最佳逼近的唯一性定理也易得到．

参 考 文 献

[1] Kripke, B. R., Rivlin, T. J., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 119 2(1973), 122-131.

[2] Holl, A. S. B., Mcabe, J. H., Phillips, G. M. and Sahney, B. N., *J. Approximation Th.* 24(1978) 361-365.

[3] Phillips, G.M. and Sahney, B. N. in "Theory of Approximation with Applications," Edited by A. G. Law and B. N. Sahney, Academic Press, New York(1976).

[4] Holl, A. S. B. and Sahney, B. N., *ibid*.

[5] 史应光，数学年刊，1(1980)，2，235-244.

[6] 史应光，数学学报，24(1981)，2，211-216.