第5卷 第1期 1985年1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.1 Jan. 1985

关于通过随机水平次数均值的问题*

林燕厦

（福建师范大学数学系）

[1]中讨论了随机过程通过一个水平面次数的均值问题。本文是讨论随机过程通过一个随机水平次数均值的问题。

令 u，$\{\xi(t),\ t\in[0,T]\}$ 分别是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的离散型随机变量和随机过程。$G(y^*)$ 是 u 的分布函数。以下我们假设 $\{\xi(t)\}$ 关于 u 是条件平稳的，即对 $\forall n>0, h\in R_1$ 及 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant T$

$$P(\xi(t_1)<x_1,\cdots,\xi(t_n)<x_n|u=y^*)=P(\xi(t_1+h)<x_1,\cdots,\xi(t_n+h)<x_n|u=y^*)$$

其特殊情况是 $\{\xi(t),t\in[0,T]\}$ 为平稳过程，且 u 与 $\{\xi(t)\}$ 独立。

引理1 若 $\{\xi(t)\}$ 是关于 u 条件平稳随机过程，则 $\{\xi(t)\}$ 也是平稳随机过程。

引理2 若 $G(y^*)$ 为 u 的分布函数，$\{\xi(t),t\in[0,T]\}$ 为关于 u 的条件平稳随机过程。$r(0|y^*)=1$，$1-r(h|y^*)\leqslant C(y^*)h^2$，$C(y^*)\geqslant 0$，$EC(u)<\infty$，则存在与 $\xi(t)$ 等价的过程 $\eta(t)$，$\eta(t)$ 以概率1具有连续的样本函数。

证明 由于

$$E(\xi(t+h)-\xi(t))^2=\int_{-\infty}^{\infty}E((\xi(t+h)-\xi(t))^2|y^*)dG(y^*)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}2(1-r(h|y^*))dG(y^*)\leqslant 2h^2\int_{-\infty}^{\infty}C(y^*)dG(y^*)=\bar{K}h^2$$

其中 $\bar{K}=2\int_{-\infty}^{\infty}C(y^*)dG(y^*)$。取 $g(h)=|\log|h||^{-2}, q(h)=\bar{K}h^2\cdot|\log|h||^4$，因此由Markov不等式

$$P(|\xi(t+h)-\xi(t)|>g(h))\leqslant q(h).$$

由于

$$\sum_{1}^{\infty}g(2^{-n})=\sum_{1}^{\infty}(\log 2)^{-2}\cdot n^{-2}<\infty$$

$$\sum_{1}^{\infty}2^n q(2^{-n})=\sum_{1}^{\infty}2^n\cdot\bar{K}\cdot 2^{-2n}|\log 2^{-n}|^4=\bar{K}(\log 2)^4\sum_{1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}<\infty$$

由[1]P63得 $\xi(t)$ 具有等价过程 $\eta(t)$，$\eta(t)$ 以概率1具有连续的样本函数。

现在给出随机过程 $\{\xi(t)\}$ 通过水平 u 的定义。称 $\xi(t,\omega)$ 在 t_0 时刻通过 $u(\omega)$，如果存在 $\delta>0$，使 $\xi(t,\omega)-u(\omega)$ 分别在 $t\in(t_0-\delta,t_0)$ 及 $(t_0,t_0+\delta)$ 上不变号，且 $(\xi(t_1',\infty)-u(\omega))$

---

*1982年4月6日收到。

$\cdot(\xi(t'',\omega)-u(\omega))<0$，其中$t'\in(t_0-\delta,t_0)$，$t''\in(t_0,t_0+\delta)$。

现在给出主要定理。

主要定理 设u为离散型随机变量，$G(y^*)$为u的分布函数，$\{\xi(t),t\in[0,1]\}$为关于u的条件平稳正态实过程，且关于u是条件均方连续，$E(\xi(t)|y^*)=0$，$r(0|y^*)=1$，当n充分大时$2^n(1-r^2(2^{-n}|y^*))\geqslant k'>0$，($k'$为常数)，$\lambda_2(y^*)<\infty$，$1-r(h|y^*)\leqslant C(y^*)h^2$。$EC(u)<\infty$，则$\{\xi(t),t\in[0,1]\}$通过$u$的次数均值为

$$EC_u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0(y^*)}{\lambda_2(y^*)}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{y^{*2}}{2\lambda_2(y^*)}\right\}dG(y^*).$$

其中$\lambda_i(y^*)=\int_0^{\infty}\lambda^i dF(\lambda|y^*)$。

证明 由引理2，不妨设$\xi(t)$以概率1具有连续的样本函数。令

$$\xi_n(t)=\begin{cases}\xi\left(\frac{i}{2^n}\right),\ t=\frac{i}{2^n}, & i=0,1,\cdots 2^n.\\ 2^n\left(t-\frac{i}{2^n}\right)\left[\xi\left(\frac{i+1}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right]+\xi\left(\frac{i}{2^n}\right),\ t\in\left[\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}\right],\end{cases}$$

则$\xi_n(t)$关于t一致收敛于$\xi(t)$。令$C_{n,u}(\omega)$，$C_u(\omega)$分别为$\xi_n(t,\omega)$，$\xi(t,\omega)$在$[0,1]$中通过$u(\omega)$的次数，则$C_{n,u}(\omega)\uparrow C_u(\omega)$ $(n\to\infty)$，$a\cdot s$。(其类似地证明见[1]P195)。因此$EC_{n,u}\uparrow EC_u(n\to\infty)$。

由于

$$EC_{n,u}=\sum_{k=0}^{2^n-1}\left[P\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)<u<\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right)+P\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)>u>\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left[P\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)<u<\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\Big|y^*\right)+P\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)>u>\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\Big|y^*\right)\right]$$

$$\cdot dG(y^*)=\int_{-\infty}^{\infty}2^n[P(\xi(0)<y^*<\xi(2^{-n})|u=y^*)+P(\xi(0)>y^*$$

$$>\xi(2^{-n})|u=y^*)]dG(y^*)$$

因为
$$\int_{-\infty}^{\infty}2^nP(\xi(0)<y^*<\xi(2^{-n})|y^*)dG(y^*)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dG(y^*)\int_0^{\infty}dz^*\int_{y^*-2^{-n}z^*}^{y^*}2^nf(x^*,z^*|y^*)dx^*$$

其中$f(x^*,z^*|y^*)$是$\xi(0)$与$\xi_n=2^n(\xi(2^{-n})-\xi(0))$关于$u=y^*$的条件联合密度，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}2^nP(\xi(0)<y^*<\xi(2^{-n})|y^*)dG(y^*)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dG(y^*)\int_0^{\infty}dz^*\int_{-z^*}^{0}f(y^*+2^{-n}x^*,z^*|y^*)dx^*$$

因为$\xi(2^{-n})$关于$\xi(0)$关于y^*的条件联合密度为正态的，因此$\xi(0)$与ζ_n关于y^*的条件联合密度也是正态的，其条件协方差阵为

$$\Sigma_n(y^*)=\begin{pmatrix}1 & 2^n(r(2^{-n}|y^*)-1)\\ 2^n(r(2^{-n}|y^*)-1) & 2^{2n+1}(1-r(2^{-n}|y^*))\end{pmatrix}$$

因此

$$f(y^*+2^{-n}x^*,z^*|y^*)=\frac{1}{2\pi(\det(\Sigma_n(y^*)))^{1/2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2(\det(\Sigma_n(y^*)))}$$

$$\cdot\Big[2(1-r(2^{-n}|y^*))\Big(2^ny^*+x^*+\frac{1}{2}z^*\Big)^2+\frac{1}{2}(1+r(2^{-n}|y^*))z^{*2}\Big]\Big\}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi(\det(\Sigma_n(y^*)))^{1/2}}\exp\Big\{-\frac{1+r(2^{-n}|y^*)}{4(\det(\Sigma_n(y^*)))}z^{*2}\Big\}$$

由于$1-r(h|y^*)\leqslant C(y^*)\cdot h^2$，$n$充分大时$\det\Sigma_n(y^*)\geqslant k'>0$因此

$$\frac{1}{2\pi(\det(\Sigma_n(y^*)))^{1/2}}\exp\Big\{-\frac{1+r(2^{-n}|y^*)}{4(\det(\Sigma_n(y^*)))}z^{*2}\Big\}\leqslant\frac{1}{2\pi k'^{1/2}}\exp\Big\{-\frac{z^{*2}}{4C(y^*)}\Big\}$$

而 $$\int_{-\infty}^{\infty}dG(y^*)\int_0^{\infty}dz^*\int_{-z^*}^0\frac{1}{2\pi k^{*1/2}}\exp\Big\{-\frac{z^{*2}}{4C(y^*)}\Big\}dx^*<\infty$$

由于$\{\xi(t)\}$为实过程，关于u条件均方连续，$\lambda_2(y^*)<\infty$，因此

$$r(h|y^*)=\int_0^{\infty}\cos h\lambda dF(\lambda|y^*),$$

$$\lim_{n\to\infty}2^{2n+1}(1-r(2^{-n}|y^*))=\lambda_2(y^*),\quad \lim_{n\to\infty}2^n(1-r(2^{-n}|y^*))=0,$$

由控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}2^nP(\xi(0)<y^*<\xi(2^{-n})|y^*)dG(y^*)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dG(y^*)\int_0^{\infty}dz^*\int_{-z^*}^0\lim_{n\to\infty}f(y^*+2^{-n}x^*,z^*|y^*)dx^*$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dG(y^*)\int_0^{\infty}dz^*\int_{-z^*}^0\frac{1}{2\pi\lambda_2^{1/2}(y^*)}\exp\Big\{-\frac{y^{*2}}{2}-\frac{z^{*2}}{2\lambda_2(y^*)}\Big\}dx^*$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_2^{1/2}(y^*)e^{-\frac{y^{*2}}{2}}dG(y^*).$$

因此 $$EC_u=\lim_{n\to\infty}EC_{n,u}=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}2^n[P(\xi(0)<y^*<\xi(2^{-n})|y^*)$$

$$+P(\xi(0)>y^*>\xi(2^{-n})|y^*)]dG(y^*)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_2^{1/2}(y^*)e^{-y^{*2}/2}dG(y^*)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{\lambda_0(y^*)}{\lambda_2(y^*)}\Big]^{-\frac{1}{2}}\exp\Big\{-\frac{y^{*2}}{2\lambda_0(y^*)}\Big\}dG(y^*).$$

参 考 文 献

[1] Gramér H., Leadbetter. M. R., Stationary and Related Stochastic Processes-Sample Functional Properties and Their Application, New. York 1967.

A Problem on the Mean Numbers of Crossing a Random Level

Lin Yian Xia

(Fujian Teachers University)

Abstract

The mean numbers of crossing a level is an important problem in probability application, so is a problem on the mean numbers of crossing a random level. In this note, we give an information on the mean numbers of crossing a random level. The formula is that

$$EC_u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0(y^*)}{\lambda_1(y^*)}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{y^{*2}}{2\lambda_0(y^*)}\right)dG(y^*).$$