第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

具有指定衰减度的极点与零点的最优配置*

陈文德

（中国科学院系统科学研究所）

§1 问题的提法

令自动调节系统的闭环传递函数为

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+a_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0},\quad m<n \tag{1}$$

系统 $G(s)$ 在单位阶跃输入下的误差函数为 $\varepsilon(t)$，即 $\varepsilon(t)$ 的 Laplace 变换式为

$$E(s)=\frac{1}{s}-\frac{G(s)}{s}=\frac{s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\cdots+(a_m-b_m)s^{m-1}+\cdots+(a_1-b_1)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \tag{2}$$

二次性能指标为

$$J_1=\int_{0^+}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}A_i\varepsilon^{(i)}(t)^2+\varepsilon^{(n)}(t)^2\Big)dt \tag{3}$$

其中 $A_0>0$，$A_i\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant n-1$。当 $b_i=0$，$1\leqslant i\leqslant m$ 时求使 J_1 极小的$G(s)$问题在调节原理中称为广义二次最优问题。现在我们研究的是 $b_i\neq 0$ 的更广的一般情况，从 $G(s)$的分子分母多项式的根分布角度看，求使 J_1极小的$G(s)$问题就是极点与零点的最优配置问题。

现代控制理论的最优调节器理论中，有所谓具有指定衰减度(或称稳定度)的最优调节器[1]，我们把这个概念也引入到误差函数$\varepsilon(t)$上，即要求把$G(s)$的极点配置得使 $\varepsilon^{(i)}(t)$，$0\leqslant i\leqslant n-1$，至少以 $e^{-\alpha t}$ 的速度衰减，$\alpha\geqslant 0$；或说使极点在左半平面实部小于 $-\alpha$ 的区域内。显然，以上把现代控制理论与自动调节原理相结合后提出的新问题是有工程实际意义的。在新的提法下，二次性能指标(3)相应修改为

$$J=\int_{0^+}^{\infty}e^{2\alpha t}\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)^{\tau}Q\boldsymbol{\varepsilon}(t)+\varepsilon^{(n)}(t)^2\}dt \tag{4}$$

这里Q为 n 阶方阵，阵Q的元素记为 Q_{ij}，$1\leqslant i,j\leqslant n$；

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=[\varepsilon^{(0)}(t),\varepsilon^{(1)}(t),\cdots,\varepsilon^{(n-1)}(t)]^{\tau}, \tag{5}$$

易知，当 $\alpha=0$，$Q_{ii}=A_{i-1}$，$Q_{ij}=0$，$i\neq j$ 时，$J=J_1$，即(3)式是更普遍的(4)式的一个特例。具有指定衰减度的极点与零点的最优配置问题，就是求使 J 达极小的 a_i，$0\leqslant i\leqslant$

* 1982年4月17日收到。

$n-1$，b_j，$1\leqslant j\leqslant m$的值。本文给出了求a_i值的简化解法，并得到了b_j值的计算公式，从而推广了文献[2]或[3]的结果（文献[2]因篇幅限制未给出其结果的证明）。

§2　极点的最优配置

下面用状态变量法来描述§1的问题。由(2)式，$\varepsilon(t)$显然满足以下微分方程

$$\varepsilon^{(n)}(t)+a_{n-1}\varepsilon^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0\varepsilon^{(0)}(t)=0 \tag{6}$$

令

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon^{(0)}(t)\\ \varepsilon^{(1)}(t)\\ \vdots\\ \varepsilon^{(n-1)}(t)\end{pmatrix},\quad \bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad \bar{B}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} & (7)\\ \boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(0^+)=\boldsymbol{\varepsilon}(0^+),\quad \bar{K}=[-a_0,-a_1,\cdots,-a_{n-1}],\quad \bar{u}=\bar{K}\boldsymbol{x} & (8)\end{cases}$$

则(6)式可改写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\bar{A}\boldsymbol{x}+\bar{B}\bar{u},\quad \boldsymbol{x}(0^+)=\boldsymbol{x}_0 \tag{9}$$

再令$\bar{R}=1$，由(6—8)式知(4)式变成

$$J=\int_{0^+}^{\infty}e^{2\alpha t}\{\boldsymbol{x}^{\tau}Q\boldsymbol{x}+\bar{u}^{\tau}\bar{R}\bar{u}\}dt \tag{10}$$

这样，求使J达极小值的a_i就是求$\bar{K}$，亦即求$\bar{u}$；所以具有指定衰减度的极点最优配置问题，就是对系统(9)，求使(10)式的J达到极小值的最优控制$\bar{u}$；这已有成熟的理论可以应用。

引理1　设一般的多变量线性定常系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0^+)=\boldsymbol{x}_0 \tag{11}$$

二次性能指标为

$$J=\int_{0^+}^{\infty}e^{2\alpha t}(\boldsymbol{x}^{\tau}Q\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\tau}R\boldsymbol{u})dt$$

当(A,B)能控，R对称正定，Q对称正定（或$Q=C^{\tau}C$，(A,C)能观）时，使上式J达极小值的$\boldsymbol{u}$的最优解是

$$\boldsymbol{u}^*=-R^{-1}B^{\tau}P\boldsymbol{x}$$

其中n阶方阵P是矩阵Riccati代数方程

$$(A+\alpha I)^{\tau}P+P(A+\alpha I)-PBR^{-1}B^{\tau}P+Q=0 \tag{12}$$

的对称正定解，（阵P的元素记为P_{ij}，$1\leqslant i,j\leqslant n$）。在$\boldsymbol{u}^*$的作用下，闭环系统$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}^*$具有指定的衰减度，对应的二次性能指标取值

$$J^*=\boldsymbol{x}_0^{\tau}P\boldsymbol{x}_0. \tag{13}$$

引理1的证明参见文献[1]。把引理1直接用到系统(9)上，由(7)(8)式得最优解

$$\bar{u}^*=-\bar{R}^{-1}\bar{B}^{\tau}P\boldsymbol{x}=-[a_0^*a_1^*\cdots a_{n-1}^*]\boldsymbol{x}=-[P_{n1}P_{n2}\cdots P_{nn}]\boldsymbol{x} \tag{14}$$

即$[a_0^*a_1^*\cdots a_{n-1}^*]=[P_{n1}P_{n2}\cdots P_{nn}]$，这里$P$是Riccati代数方程

$$(\bar{A}+\alpha I)^{\tau}P+P(\bar{A}+\alpha I)-[P_{1n}P_{2n}\cdots P_{nn}]^{\tau}[P_{n1}P_{n2}\cdots P_{nn}]+Q=0 \tag{15}$$

的对称正定解。为求得a_i^*，一般要解$n(n+1)/2$个二次方程联立起来的(15)式，n大时计算求解十分复杂。下面我们运用一些技巧，把(15)式的求解简化为解n个联立二次代数方程，再用递推公式。为了得到统一的公式，我们规定

$$P_{ik}=Q_{ik}=0,\ k\leqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant n;\ a=0\text{时}(2a)^0=1. \tag{16}$$

引理 2　(15)式的解P_{ik}满足以下递推关系

$$P_{i-1,k}=P_{in}P_{nk}-P_{i,k-1}-2aP_{ik}-Q_{ik},\ n\geqslant i>k\geqslant 1, \tag{17}$$

更进一步有如下表达式

$$\begin{aligned}P_{i-1,k}=&\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\sum_{s=0}^{j}(2a)^s\binom{j}{s}(P_{i+j,n}P_{n,k+s-j}-Q_{i+j,k+s-j})\\&+(-1)^{n-i+1}\sum_{s=0}^{n-i+1}(2a)^s\binom{n-i+1}{s}P_{n,k+s+i-n-1},\ n\geqslant i>k\geqslant 1.\end{aligned} \tag{18}$$

证明　经矩阵运算后，(15)式变成

$$\begin{pmatrix}P_{1n}P_{n1} & P_{1n}P_{n2}\cdots P_{1n}P_{nn}\\ P_{2n}P_{n1} & P_{2n}P_{n2}\cdots P_{2n}P_{nn}\\ & \vdots \\ P_{nn}P_{n1} & P_{nn}P_{n2}\cdots P_{nn}P_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2aP_{11}+Q_{11} & P_{11}+2aP_{12}+Q_{12} & \cdots & P_{1n-1}+2aP_{1n}+Q_{1n}\\ P_{11}+2aP_{21}+Q_{21} & P_{12}+P_{21}+2aP_{22}+Q_{22} & \cdots & P_{1n}+P_{2n-1}+2aP_{2n}+Q_{2n}\\ P_{21}+2aP_{31}+Q_{31} & P_{22}+P_{31}+2aP_{32}+Q_{32} & \cdots & P_{2n}+P_{3n-1}+2aP_{3n}+Q_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \\ P_{n-11}+2aP_{n1}+Q_{n1} & P_{n-12}+P_{n1}+2aP_{n2}+Q_{n2} & \cdots & P_{n-1n}+P_{nn-1}+2aP_{nn}+Q_{nn}\end{pmatrix}, \tag{19}$$

比较上式二个矩阵左下三角中的$n(n-1)/2$个元素，它们必然相等，再用(16)式立得(17)式。运用(17)经多次递推后$P_{i-1,k}$可用P_{nl}, $l\leqslant k$, 与Q表出，(18)式就是这样的表达式。如我们规定$\binom{0}{0}=\binom{1}{0}=\binom{m}{0}=1$，并在计算中应用基于二项式定理的组合公式：$\binom{j}{s-1}+\binom{j}{s}=\binom{j+1}{s}$，$0<s\leqslant j$，则用反向归纳法与(17)式可严密证明(18)式，引理2证毕。

定理 1　设系统的闭环传递函数$G(s)$如(1)所示，它在单位阶跃输入下误差函数$\varepsilon(t)$的二次性能指标J如(4)式所示，(4)式中Q为对称正定阵(或$Q=C^\tau C$，$(\bar{A},C)$能观，$\bar{A}$由(7)式定义)；则使J达极小值的最优参数

$$a_i^*=P_{n,i+1},\ 0\leqslant i\leqslant n-1 \tag{20}$$

这里$P_{n,i+1}$满足n个二次联立代数方程

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\sum_{s=0}^{j+1}(2a)^s\left\{\binom{j}{s}+\binom{j+1}{s}\right\}(P_{i+j+1,n}P_{n,i+s-j-1}-Q_{i+j+1,i+s-j-1})\\&=P_{ni}^2-Q_{ii},\ i=1,2,\cdots,n.\end{aligned} \tag{21}$$

(上式中设$\binom{j}{j+1}=0$，$\binom{j}{0}=\binom{j+1}{0}=1$，$P_{n+1,n}=1$，$Q_{n+1,k}=0$) 且对称阵$P$的其它元素

P_{ik}满足递推公式(17)，P是正定阵。方程(21)可用数值解法例如牛顿法求解。最优极点配置可由分母$s^n+a^*_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a^*_1s+a^*_0=0$求根本来得出。

证明　对于(7)式定的$\bar{A},\bar{B}$，易验$(\bar{A},\bar{B})$能控，$\bar{R}=1$显然对称正定，由定理假设，Q满足引理1的条件，再由(7—10)式易知可应用引理1，所以$a^*_i=P_{n,i+1}$，$0\leqslant i\leqslant n-1$，这里$P$满足方程(15)。由(19)式二个矩阵主对角线上元素相等得

$$2P_{i,i-1}+2aP_{ii}=P^2_{ni}-Q_{ii},\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{22}$$

应用引理2得到P_{ii}，$P_{i,i-1}$的(18)式形式的表达式后，代入(22)式，并在计算中应用组合公式：$2\binom{j}{s}+\binom{j}{s-1}=\binom{j}{s}+\binom{j+1}{s}$与设$\binom{m}{m+1}=0$，即可得(21)式，定理1证毕。

§3　零点的最优配置

引理3　(2)式对应的误差函数$\varepsilon(t)$的初值x_0与(1)式$G(s)$中的参数a_i,b_i间有如下关系

$$x_0=[1\ 0\cdots 0\ x_{n-m+1}(0^+)\cdots x_n(0^+)]^\tau$$

其中

$$\begin{pmatrix} x_{n-m+1}(0^+)\\ x_{n-m+2}(0^+)\\ \vdots\\ x_n(0^+)\end{pmatrix}=-\tilde{A}^{-1}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \cdots & a_{n-1} & 1\\ a_{n-m+2} & a_{n-m+3} & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{23}$$

这引理是调节原理中已有结果，这里改用了矩阵描述，证明略去。引理3给出了零极点参数b_i，a_i与初值x_0的关系，而现代控制理论的(13)式给出了动态指标J^*与初值间的关系，本文把现代控制理论与调节原理二种方法结合起来的优越性就在于能给出动态指标J^*与零点间的关系，进而可得最优零点。

定理2　对于定理1所讨论的系统与二次性能指标，最优极点配置对应的最优参数a^*_i按(20)式取定后，$J^*=x_0^\tau Px_0$；使这个二次性能指标J^*达到进一步极小值J^*_{min}的最优零点对应的最优参数b^*_i，$1\leqslant i\leqslant m$，为

$$\begin{pmatrix} b^*_1\\ b^*_2\\ \vdots\\ b^*_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^*_{n-m+1} & a^*_{n-m+2} & \cdots & a^*_{n-1} & 1\\ \vdots & & & & \\ a^*_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{n-m+1,n-m+1} & P_{n-m+1,n-m+2} & \cdots & P_{n-m+1,n}\\ P_{n-m+2,n-m+1} & P_{n-m+2,n-m+2} & \cdots & P_{n-m+2,n}\\ \vdots & & & \\ P_{n,n-m+1} & P_{n,n-m+2} & \cdots & P_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} P_{1,n-m+1}\\ P_{1,n-m+2}\\ \vdots\\ P_{1n}\end{pmatrix}$$

$$\triangleq\tilde{A}^*P_m^{-1}[P_{1,n-m+1}\ P_{1,n-m+2}\cdots P_{1n}]^\tau, \tag{24}$$

其中$a^*_i=P_{n,i+1}$，P满足(15)式，P_{ik}由(21)(17)式算出。

证明　由引理1知$J^*=x_0^\tau Px_0$，P满足(15)式。由引理3知a^*_i取定后，J^*还是b_i的函数，为求J^*_{min}对应的b^*_i，先来求解方程$\frac{\partial J^*}{\partial b_i}=0$，$1\leqslant i\leqslant m$，显然

$$\frac{\partial J^*}{\partial b_i}=\frac{\partial x_0^\tau}{\partial b_i}Px_0+\left(x_0^\tau P\frac{\partial x_0}{\partial b_i}\right)^\tau=2\frac{\partial x_0^\tau}{\partial b_i}Px_0=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m, \tag{25}$$

由引理 3 经计算知上式为

$$(-\bar{A}^{*-1})P_m(-\bar{A}^{*-1})[b_1b_2\cdots b_m]^\tau-\bar{A}^{*-1}[P_{1,n-m+1}P_{1,n-m+2}\cdots P_{1n}]^\tau=O \tag{26}$$

因为定理 1 中取 P 为正定实对称阵，而det P_m就是二次型 $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}y_{n-i}P_{n-i,n-j}y_{n-j}$ 的m阶主子式，所以det $P_m\neq0$，P_m^{-1}存在，于是从(26)式可得方程组(25)的解为(24)式。

由 (25) 式经计算易知J^*对 b_i 的二阶偏微商构成的方阵为

$$W=2[\,0\,-\bar{A}^{*-1}]\,P\begin{bmatrix}0\\-\bar{A}^{*-1}\end{bmatrix}$$

因为$\bar{A}^{*-1}$可逆，所以对任一非零m维向量 x 有$\bar{A}^{*-1}x\neq o$，于是根据 P 正定与正定的定义，可知对任一非零m维向量 x 有

$$x^\tau Wx=2x^\tau[0-\bar{A}^{*-1}]\,P\begin{bmatrix}0\\-\bar{A}^{*-1}\end{bmatrix}x=2[O^\tau(-\bar{A}^{*-1}x)^\tau]P\begin{bmatrix}O\\-\bar{A}^{*-1}x\end{bmatrix}>0$$

所以W是正定对称阵。根据多变量函数求极值的理论，可知在 b_i^* 上取到的是极小值$J_{\min}^*$，定理 2 证毕。

附记　易验证，本文包含文献[2]推论 1 等结果为特例（[2]中 $a=0$，$J=J_1$）。国外文献中对零点的稳态性质已有研究[4]，但笔者尚未见有最优零点方面的结果。

致谢：用 Riccati 方程方法代替 Ляпунов 方法[2]研究最优零极点的可能性是秦化淑同志向笔者指出的，谨向她表示感谢。

参　考　文　献

[1] Anderson B. D. O. and Moore. J. B., Linear optimal Control. Englewood cliffs. N. J., Prentice-Hall. 1971.

[2] 陈文德，线性定常系统的Ляпунов函数公式和一类参数最佳问题，全国控制理论及其应用学术交流会论文集，1981，科学出版社，pp121—122.

[3] 林德新，最平幅频特性与二次性能指标最优，电气传动，1981，1期，p34—44.

[4] Macfarlane. A. G. J. and Karconias. Poles and zeros of linear multivariable system: a survey of the algebraic geometric and complexvariable theory. *Int. J. Control*. 1976. Vol. 24. №:1. pp34—74.

Optimal Assignment of the Poles and Zeros with given Stability

Chen Wende

Abstract

In this paper we propose the problem of the quadratic optimal regulation with given stability of the error functions under step input. We obtain a simple algorithm for the optimal poles and give a computation formula for the optimal zeros.