第5卷 第1期 1985年1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.1 Jan. 1985

不分明嵌入理论及其应用*

刘应明
（四川大学 数学研究所）

提 要

本文讨论一类格上拓扑学中嵌入问题，确切说是讨论值域为fuzzy格的L不分明拓扑空间中嵌入理论及其应用。首先概述若干诸如不分明单位区间、重域构造以及格上保并映射类的代数运算等基础性成果。其次给出不分明完全正则的点式刻划与关于一致结构的著名Weil定理的不分明推广并从而建立了在不分明单位方体中一般性的嵌入定理。最后作为嵌入定理的应用，得到了不分明Urysohn度量化定理并完成了不分明Stone-Čech紧化的一般理论．

1 引 言

格上拓扑学研究，经过大数学家Ehresmann[1]的倡导，已经颇令人关注并与像同伦论之类分支发生关联。最近Johnstone的综合报告［2］对此有很好的陈述。正如该文所说，格上拓扑学研究正从无点化研究方式走向有点化。尽管该文还未注意到不分明拓扑方面的工作，但不分明拓扑研究的正是一类相当广的格上拓扑问题。而且不分明拓扑研究中已经历了无点化向有点化的过渡并且走向两者的综合，得到诸如嵌入定理之类深一层次的结果。因而，不分明拓扑一方面固然是不分明数学的基础性部分，但另一方面，从传统数学角度看，也是格上拓扑学中很值得注意的方面。本文希望通过嵌入理论这个论题的讨论，反映出不分明拓扑学的这一发展。

本文中X表非空的通常集。$\boldsymbol{R}$表实直线。I表实单位区间，$\boldsymbol{N}$表自然数集。$(L, \leqslant, \vee, \wedge, ')$表fuzzy格即具有逆序对合对应$'$的完全分配格；$L$的最大元与最小元分别记作$1$与$0$。$X$上一个$L$不分明集（简称不分明集）是$X$至$L$的一个映射。不分明集是以通常集为特款的。自1968年起，人们开始考虑在X上全体L不分明集上建立拓扑结构。现在不分明拓扑已是不分明数学中一个生气蓬勃的领域。不分明拓扑空间是通常拓扑空间的拓广，除了简单的平移性结果外，不分明拓扑已有若干较有意思的结果[3]。最可瞩目者或许有两个方面：(1) 所谓“无点化”流派对不分明一致结构与度量的深入工作[4,5]；(2) 不分明点的引进及其合理的邻近构造——重域系的建立，由此导至所谓“有点化”方向的一系列工作[6-13]。现在我们将综合这两个方面成果建立不分明嵌入定理。为此，首

* 1984年2月11日收到．本工作为中国科学院科学基金会资助课题．

先需要寻求一个足够良好的空间作为“标准空间”并寻求一个比较简单的条件（通常是关于空间分离性的条件）使满足这些条件的不分明拓扑空间能够同胚地嵌入到标准空间中作为子空间。这样，这些比较简单的条件就蕴涵着标准空间的子空间的许多良好性质。这一过程在数学研究中已经证明常常是富有成果的。

现在在不分明拓扑学中，一个足够良好的不分明拓扑空间已由 Hutton 给出[14,15] 亦即相对于格 L 的不分明单位区间 $I(L)$ 及其积空间。我们先在 §2 扼要介绍 $I(L)$ 的构造。至于所希望的分离性条件亦即不分明完全正则性与所谓不分明次 T_0 性的建立与刻划则需要若干准备。在 §3 我们将通过不分明集论中邻属关系分析，用一组颇为直观的公理刻划出重域系这种邻近构造[16,17]。这是与传统的邻域系不同的新的邻近构造。在不分明拓扑空间这拓广了的框架上，传统邻域系严重局限与重域系的合理性现在似都已较明显了。在 §4 我们进行代数方面准备，探讨了格上保并映射类之间的代数运算及其性质[18-20]。作了这些准备之后，在 §5 我们论讨了不分明完全正则性的点式刻划与不分明次 T_0 性，完成了嵌入定理中所需要的分离性条件方面工作。我们在 §6 给出了嵌入到不分明方体(即不分明单位区间的积空间）的充要条件，给出一般性的嵌入定理。在本文最后两节，作为嵌入定理的应用，给出不分明Urysohn 度量化定理[21]与不分明 Stone-Čech 紧化的理论[22]。

下面叙述一些记号与概念。对 X 上不分明集 A，通常集 $\{x\in X: A(x)>0\}$称作 A 的承集并记作 supp A。一个 L 不分明点是仅在某一点 $x\in X$ 取非零值 λ 的不分明集，记作 x_λ，这里 λ 称作它的从属度。X 上全体 L 不分明集，记作 L^X，可点式定义其格运算与对合对应，形成一个 fuzzy 格（L^X, $\subseteq$, $\cap$, $\cap$, $'$）。X 上一个 L 不分明拓扑是指 L^X 的一个子族 $\mathscr{T}$，它在有限交与任意并的运算下封闭。偶对（$X,\mathscr{T}$）表具有不分明拓扑 $\mathscr{T}$ 的 L 不分明拓扑空间。如无混淆危险，下文中不分明构造中“不分明”一词常予省略。

2 不分明单位区间 I(L)[14,15]

将满足在小于零处取值 1，大于 1 处取值零的从 $\boldsymbol{R}$ 至 L 的单调递降的映射全体记作 $\tilde{I}$。对 $\lambda,\mu\in\tilde{I}$，称 λ 与 μ 等价，若对每个实数 t，$\lambda(t-)=\mu(t-)$ 且 $\lambda(t+)=\mu(t+)$，这里 $\lambda(t+)=\bigvee\limits_{s>t}\lambda(s)$，$\lambda(t-)=\bigwedge\limits_{s<t}\lambda(s)$。所谓不分明单位区间，记作 $I(L)$，就是 $\tilde{I}$ 的相应的等价类全体。如无另外声明，下文中不分明单位区间上拓扑就是指由子基 $\{L_t,R_t: t\in\boldsymbol{R}\}$ 生成的拓扑，这里 $L_t(\lambda)=\lambda(t-)'$，$R_t(\lambda)=\lambda(t+)$。

定理 1 设 L 为正交补格，即对$\forall a\in L$，有 $a\wedge a'=0$ 与 $a\vee a'=1$，则在实单位区间 [0,1] 的开集族与 I(L) 的开集族之间存在一个自然的一一对应 φ，φ 保持有限交与任意并且可定义作：

$$\varphi((a,b))=R_a\wedge L_b,\ \text{这里}\ (a,b)\subseteq I.$$

这个定理说明当格 L 满足适当条件时，$I(L)$ 与 I 确有许多相似之处，不过，也应着重指出，两个空间的开集族之间的这种一一对应存在并不能说明它们是同胚的。事实上 $I(L)$ 在分离性与紧性等方面有其特有的又颇重要的性质。作为例子，我们叙述下面的结果：

定理 2 设 L 为正交补格，对 $a\in$L，$a>0$，I(L) 允许是非 a^* 紧的。

这里有关概念请看文献〔15〕，那里就 $\alpha=1$ 情形举例说明 $I(L)$ 可能是非 1^* 紧的。正如典建伟同志所指出，这个例子也说明 $I(L)$ 可能是非 α^* 紧（$0<\alpha\leqslant 1$）。关于 $I(L)$ 的特有性质还可看文献〔9〕与〔23〕。

3　不分明邻属关系与重域[6,9,10,17]

不分明点 x_λ 与不分明集 A 之间存在不分明邻属关系 $\lhd$ 时用记号 $X_\lambda\lhd A$ 表示。关系 $\lhd$ 的否定用 $\not\lhd$ 表示。例如，作为通常“属于关系”不分明集中自然推广，可引进关系 $\in$ 如次：

$$x_\lambda\in A \quad \text{当且仅当} \quad \lambda\leqslant A(x).$$

对于这个属于关系 $\in$，下述十分基本的“择一原则”是不成立的。

择一原则　设 $\{A_i\}$ 是一族不分明集，若 $x_\lambda\lhd\vee\{A_i\}$，则存在某个 A_j 使 $x_\lambda\lhd A_j$。

事实上，取 $L=[0,1]$，$\lambda=1$，$x\in X$ 以及 $A_n=x_{1-1/n+1}$，$n\in N$。显然 $\vee\{A_n\}=x_1$，从而 $x_\lambda\in\vee\{A_n\}$，但 $x_\lambda\notin$ 任一 A_n，即择一原则对关系 $\in$ 不成立。

在通常集论中，对属于关系而言，择一原则是一个自明的且到处使用的事实。注意到关系 $\in$ 正对应于传统的邻域系构造（一种邻近构造是由一种邻属关系加上开集构造得出的），邻域系在不分明拓扑中严重局限或许正起因于择一原则对关系 $\in$ 的失效。

下面将给出四条似乎颇为直观的原则，由此来决定较合理的不分明邻属关系 $\lhd$。

Ⅰ **扩充原则**　限制于通常集与通常点时，关系 $\lhd$ 成为通常的属于关系 $\in$，亦即对任意fuzzy格L，若 p 与 A 是通常点与通常集，那么 $p\lhd A$ 当且仅当 $p\in A$。

注意到不分明集是以通常集为特款，扩充原则的要求是自然的。

对于不分明点 $p=x_\lambda$ 与不分明集 A，p 邻属于 A 与否理应由 p 与集 A 在 X 上各点取的值来决定。但 p 在点 x 之外恒取零值，所以这个邻属关系应由 $p(x)=\lambda$ 与 $A(x)=\mu$ 的关系来决定。因为格 L 是由半序关系 $\leqslant$ 与对合对应来描述的，所以 λ 与 μ 的关系应由一组籍助 $\leqslant$ 与对合对应给出的关系 λ 与 μ 的式子来表示（例如 $\lambda\nleqslant\mu'$）。此外，这一组式子将不仅对某对 λ 及 μ 有效，而应是对任意fuzzy格 L 及 $\lambda\in L(\lambda\neq 0)$ 与 $A(x)$ 同样有效。根据这些考虑，我们得到

Ⅱ. **值域决定原则**　点 $x_\lambda\lhd A$ 与否将由一组籍助 $\leqslant$ 与对合对应给出的关于 λ 与 $A(x)$ 的式子来决定，此外，这组式子不仅对某一对 λ 与 $A(x)$ 有效，而且对任意fuzzy格 L 及 $\lambda\in L(\lambda\neq 0)$ 与 $A(x)$ 同样有效。

Ⅲ. **极大极小原则**　对任一不分明点 p，有 $p\lhd X$ 与 $p\not\lhd\phi$，这里 X 与 ϕ 分别表 X 上最大与最小的 L 不分明集。

Ⅳ. **择一原则**　（已如上述）。

注　原则Ⅰ可由原则Ⅱ与Ⅲ推出，但因其相当直观，仍予保留。原则Ⅱ、Ⅲ与Ⅳ组成一个具有独立性系统。

定义1　点 x_λ 重于集 A 当且仅当 $\lambda\nleqslant A'(x)$，此时亦称 x_λ 与 A 相重，

定理3　重于关系是满足上述四条原则的唯一的邻属关系。

定义2　在不分明拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中，集 A 称作点 x_λ 的重域，若有不分明开集 $U\subseteq A$

且与点 x_1 相重。

重于关系及其相应的重域系构造在不分明拓扑的许多领域，如收敛理论，积空间与商空间理论，紧性理论，一致结构与嵌入理论，度量化理论以及不分明函数空间理论等方面起了重要作用。

4　格上保并映射类的代数运算与不分明一致结构[4,17,18,19]

在一般拓扑中，X 上一个分明一致结构通常就是指 $X\times X$ 中满足某些条件的集族。集合 $X\times X$ 中一个包含对角线 $\{(x,x):x\in X\}$ 的子集 $\widetilde{D}$ 可看作一个映射 $D:2^X\to 2^X$：对 $U\in 2^X$，

$$D(U)=\{y:x\in U,(x,y)\in\widetilde{D}\},$$

并且 D 是增值的（即 $D(U)\supseteq U$）与保并的（即对 $U_a\in 2^X$，$D(\cup U_a)=\cup D(U_a)$。反之，若给了一个保并的增值的从 2^X 至 2^X 的映射 D，由 $\widetilde{D}=\{(x,y):y\in D(x),\ x\in X\}$ 给出 $X\times X$ 中包含对角线的子集 $\widetilde{D}$。循此，我们可以定义不分明一致结构为 $L^X\to L^X$ 的保并增值映射族 $\mathscr{H}(X)$ 中满足适当条件的子族。这些条件的给出涉及到 $\mathscr{H}(X)$ 中交运算与逆运算。

定义3　设 L_1 与 L_2 是完备格，映射 $f:L_1\to L_2$ 称作保序的，若 $a\geqslant b$ 有 $f(a)\geqslant f(b)$。映射 $f:L_1\to L_2$ 称作保并的，若对任意 $a_j\in L_1$，有 $f(\vee a_j)=\vee f(a_j)$。

定义4　设 $a\in L$。L 中子集 B 称作 a 的极小族，若（1）$\sup B=a$ 且（2）对 L 中任一满足 $\sup A=a$ 的子集 A 及任一 $b\in B$，有 $d\in A$ 使 $d\geqslant b$。

Hutton 已证明完全分配格中任一元素 a 都有其相应的极小族存在。

命题1　设 L_1 与 L_2 为完备格，$f:L_1\to L_2$ 为保序映射，可定义 $f^*:L_1\to L_2$ 如次：

$$f^*(a)=\bigwedge_{\sup D=a}\{\bigvee_{d\in D}f(d)\},\quad a\in L_1.$$

那么，若 L_1 满足完全分配律，则

(1) $f^*\leqslant f$，即 $\forall a\in L_1$，$f^*(a)\leqslant f(a)$。

(2) 设 B 为 $a\in L_1$ 的极小族（存在!），则 $f^*(a)=\bigvee_{b\in B}f(b)$。

(3)　$f^*:L_1\to L_2$ 为保并映射。

(4)　f^* 是小于或等于 f 的保并映射中最大者。

定义5　设 L_1 与 L_2 为完备格且 L_1 满足完全分配律，f_1，f_2：$L_1\to L_2$ 为保并映射。我们定义 $f_1\cap f_2$，$f_1\wedge f_2:L_1\to L_2$ 如次

$$(f_1\cap f_2)(a)=f_1(a)\wedge f_2(a)\qquad a\in L_1,$$

$$(f_1\wedge f_2)(a)=(f_1\cap f_2)^*(a)\qquad a\in L_1,$$

映射 $f_1\wedge f_2$ 称作 f_1 与 f_2 的交。

由命题 1 易见 $f_1\wedge f_2$ 仍是保并的，

定理4　设 L_1 与 L_2 为完全分配格，$f_1,f_2:L_1\to L_2$ 为保并映射，那么

$$(f_1\wedge f_2)(a)=f_1(a)\wedge f_2(a)\wedge(\bigwedge_{a_1\vee a_2=a}[f_1(a_1)\vee f_2(a_2)]).$$

进而，当且仅当 $f_1(0)=f_2(0)$ 时，上式可简化为：

$$(f_1\wedge f_2)(a)=\bigwedge_{a_1\vee a_2=a}[f_1(a)\vee f_2(a_2)].$$

下面将L_1至L_2的保并映射集全体记作$\mathscr{Q}(L_1,L_2)$且当$L_1=L_2=L$时，简记为$\mathscr{Q}(L)$。

定义 6　设$f:L_1\to L_2$为保并映射。映射f的逆$f^{-1}:L_2\to L_1$定义作：

$$f^{-1}(a)=\inf\{b\in L_1:f(b')\leqslant a'\},\qquad a\in L_2.$$

定理 5　设$f:L_1\to L_2$与$g:L_2\to L_1$为保并映射，那么$g=f^{-1}$当且仅当下面两条件成立：

(1) 当$a\neq 0$，$g(b')\leqslant a'\longleftrightarrow f(a)\leqslant b$.

(2) 当$a=0$，$g(b')=a'=1\longleftrightarrow$或$f(0)\not\leqslant b$或仅有$d=0$使$f(d)\leqslant b$.

此外，当$f(0)=0$时，上述结果可简化为：

$g=f^{-1}$当且仅当如次条件成立：

$$g(b')\leqslant a'\longleftrightarrow f(a)\leqslant b.$$

注　这个定理与下面命题2的陈述较文献〔20〕中原来形式为一般，那里结果实际上只能对将0映成0的保并映射成立。这一点何伯镛也曾独立地指出过。

命题 2　设L_1,L_2与L_3为fuzzy格，$f,g:L_1\to L_2$及$h:L_2\to L_3$为保并映射，那么

(1) $f^{-1}:L_2\to L_1$为保并映射且$f^{-1}(0)=0$.

(2) $(f^{-1})^{-1}\leqslant f$且当$f(0)=0$时，有$(f^{-1})^{-1}=f$.

(3) 若$f\leqslant g$则$f^{-1}\leqslant g^{-1}$；反之当$f^{-1}\leqslant g^{-1}$且$f(0)=g(0)=0$时，有$f\leqslant g$.

(4) $(h\circ f)^{-1}\geqslant f^{-1}\circ h^{-1}$且当$h(0)=0$时，有$(h\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ h^{-1}$.

(5) $(f\wedge g)^{-1}=f^{-1}\wedge g^{-1}$.

现在设$G:L_1\to L_2$与$H:L_2\to L_1$为保并映射，我们可定义一对应Ω：$\mathscr{Q}(L_2)\to\mathscr{Q}(L_1)$如次：对$g\in\mathscr{Q}(L_2)$，$\Omega(g)(a)=HgG(a)$，$a\in L_1$。我们有

命题 3　(1) $\Omega(g)\in\mathscr{Q}(L_1)$.

(2) 对$g_1,g_2\in\mathscr{Q}(L_2)$，$\Omega(g_1\wedge g_2)\leqslant\Omega(g_1)\wedge\Omega(g_2)$.

(3) 若G是极小族保持的保并映射，H是有限交保持的保并映射，则对$g_1,g_2\in\mathscr{Q}(L_2)$，有

$$\Omega(g_1\wedge g_2)=\Omega(g_1)\wedge\Omega(g_2).$$

定理 6　设保并映射$G:L_1\to L_2$与$H:L_2\to L_1$满足下列条件

$$(1)\quad GH(b)\leqslant b\qquad\forall b\in L_2,$$

$$(2)\quad HG(a)\geqslant a\qquad\forall a\in L_1,$$

$$(3)\quad H(b')=H(b)'\qquad\forall b\in L_2,$$

那么对$g\in\mathscr{Q}(L_2)$，有$\Omega(g^{-1})=(\Omega(g))^{-1}$.

现在可引入X上拟一致结构$\mathscr{D}$如次：

定义7　X上一个不分明拟一致结构$\mathscr{D}$是L^X至L^X的保并增值映射族$\mathscr{H}(X)$的子族且满足

(Q1) $\mathscr{D}\neq\varnothing$

(Q2) 若$D\in\mathscr{D}$且$D\leqslant E\in\mathscr{H}(X)$，则$E\in\mathscr{D}$.

(Q3) 若$D,E\in\mathscr{D}$，则$D\wedge E\in\mathscr{D}$.

(Q4) 若$D\in\mathscr{D}$，则存在$E\in\mathscr{D}$使$E\circ E\leqslant D$.

X上一个不分明拟一致结构$\mathscr{D}$若还满足

(Q5) 若$D\in\mathscr{D}$，则$D^{-1}\in\mathscr{D}$，
则称$\mathscr{D}$为X上一个不分明一致结构。

X上一个不分明拟一致结构$\mathscr{D}$在X上生成一个不分明拓扑$\mathscr{T}_{\mathscr{D}}$如下：

$$\mathrm{Int}U=\bigcup\{V\in L^X:\ \exists D\in\mathscr{D}\text{ 使 }D(V)\subseteq U\}.$$

不分明拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称作可不分明一致化的，若存在X上不分明一致结构$\mathscr{D}$使$\mathscr{T}=\mathscr{T}_{\mathscr{D}}$。

5 不分明完全正则空间与不分明次T_0空间[4,9]

定义8 $(X,\mathscr{T})$称作不分明完全正则空间，若对$\forall U\in\mathscr{T}$，有L^X中子集$\{W_\alpha\}$使$U=\bigcup\{W_\alpha\}$且对每个W_α，有不分明连续映射$f_\alpha:(X,\mathscr{T})\to I(L)$满足

$$W_\alpha\subseteq f_\alpha^{-1}(L_1')\subseteq f_\alpha^{-1}(R_0)\subseteq U.$$

定理7 $(X,\mathscr{T})$是可不分明一致化的，即X上有一个不分明一致结构$\mathscr{D}$使其生成的拓扑$\mathscr{T}_{\mathscr{D}}=\mathscr{T}$的充要条件是$(X,\mathscr{T})$是不分明完全正则空间。

上述定理是著名的Weil定理的不分明推广。它最初给出在文献[4]中，但那里证明颇有缺陷，一个完整的证明可参看文献[9]。由于这个定理，我们可籍助关于不分明一致结构方面较深入的结果对不分明完全正则性进行研究。首先，定义8中开集U的分解$\{W_\alpha\}$中不分明集W_α可以认为是开的，即有

命题4 $(X,\mathscr{T})$为不分明完全正则空间当且仅当对$\forall U\in\mathscr{T}$，有$\mathscr{T}$中子集$\{W_\alpha\}$使$U=\bigcup\{W_\alpha\}$且对每个W_α，有连续映射$f_\alpha:(X,\mathscr{T})\to I(L)$满足$W_\alpha\subseteq f_\alpha^{-1}(L_1')\subseteq f_\alpha^{-1}(R_0)\subseteq U$.

其次，在U的分解$\{W_\alpha\}$中有某种不确定性从而不便于使用，如果能给出不分明完全正则性一种点式刻划（如同通常拓扑空间中那样），无疑是较方便的。特别在嵌入问题讨论中，要给出到标准空间的嵌入映射势必涉及到点之间对应，这种点式刻划是十分必要的了。利用上面关于重域系构造及格上保并映射类的代数运算的讨论，我们可给出如下的点式刻划：

定理8 $(X,\mathscr{T})$是不分明完全正则空间当且仅当对X上每个不分明点e及其任一重域B，存在e的重域A及连续映射$f:(X,\mathscr{T})\to I(L)$使$A\subseteq f^{-1}(L_1')\subseteq f^{-1}(R_0)\subseteq B$.

作为点式刻划的应用，我们有下列不分明完全正则性的的可乘性定理，有关不分明积空间的基本概念与结果参看文献[6]。

定理9 设J为指标集。对每个$\alpha\in J$，$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$是不分明完全正则空间，那么它们的积空间也是不分明完全正则空间。

正如通常拓扑学所示，为建立嵌入定理，除了完全正则性之外，还需要其它的诸如T_1性之类的要求。在不分明拓扑空间中，我们引入一种新型分离性——次T_0性如下：

定义9 $(X,\mathscr{T})$称作不分明次T_0空间，若对X中任意一对不同的通常点x与y，有$\lambda\in L$且$\lambda\neq 0$使得或者$x_\lambda\not\in\bar{y}_\lambda$或者$y_\lambda\not\in\bar{x}_\lambda$，这里$\bar{y}_\lambda$表点$y_\lambda$的闭包。

我们指出(1) $I(L)$是次T_0空间但它既不是拟T_0的也不是不分明T_2的。(2)任一次T_0空间的子空间是次T_0的。

命题5 设J为指标集，对$\forall\alpha\in J$，$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$为不分明拓扑空间，$(X,\mathscr{T})$为它们的积空间。那么

(1) 若每个 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是次 T_0 的，则 $(X, \mathscr{T})$ 也是次 T_0 的。

(2) 当 L 是全序时，$(X, \mathscr{T})$ 为次 T_0 当且仅当每个 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 为次 T_0 的。

我们称不分明完全正则的次 T_0 空间为不分明 Tychonoff 空间。由定理 9 与命题 5，易见 Tychonoff 空间是可积的且其子空间也必是 Tychonoff 空间。因为 $I(L)$ 是不分明一致空间且为次 T_0 的，故 $I(L)$ 及不分明方体 $C(L)$（若干 $I(L)$ 的积空间）是不分明 Tychonoff 空间。

6　不分明嵌入定理[6]

既然标准空间 $C(L)$ 即不分明方体已给出，所希望的分离性也已考察，我们现在着手建立不分明嵌入定理。

定义 10　设 $\mathscr{F}$ 为连续映射族，$\mathscr{F}$ 的成员 f 是 $(X, \mathscr{T})$ 至 $(Y_f, \mathscr{T}_f)$ 的连续映射。又设 $(Y, \mathscr{U})$ 为诸 $(Y_f, \mathscr{T}_f)$ 的积空间，那么

(1) 由 $E(x)_f = f(x)$ $(x \in X)$ 给出的映射 $E: X \to Y$ 称作赋值映射。

(2) $\mathscr{F}$ 叫做区别点的，若对 X 中任一对不同的点 x 与 y，有 $f \in \mathscr{F}$ 使 $f(x) \neq f(y)$。

(3) $\mathscr{F}$ 叫做区别点与闭集的，若对每个闭集 A 与每个不分明点 $e \not\leqslant A$，存在 $f \in \mathscr{F}$ 使 $f(e) \not\leqslant \overline{f(A)}$。

定理 10（嵌入引理）。(1) 赋值映射 $E: (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{U})$ 是连续的。

(2) 若 $\mathscr{F}$ 区别点与闭集，则 E 是从 X 至 $Y_1 = E(X)$ 的开映射，这里 Y_1 上取子空间的相对拓扑。

(3) 若 $\mathscr{F}$ 区别点的，正则 E 是一一对应。

这个嵌入引理把一个空间嵌入到 $C(L)$ 的问题，归结为寻找足够多的到 $I(L)$ 的连续映射问题。

命题 6　设 $\mathscr{F}$ 区别点与闭集的，又设 $(X, \mathscr{T})$ 是次 T_0 的，则 $\mathscr{F}$ 是区别点的。

命题 7　设 $f: (X, \mathscr{T}) \to I(L)$ 是不分明连续的，$A \in L^X$，$U \in \mathscr{T}$ 且 $A \subseteq f^{-1}(R_0) \subseteq U$。若点 x_λ 重于 A，那么 $f(x_\lambda) \not\leqslant \overline{f(U')}$。

命题 8　设 $(X, \mathscr{T})$ 是不分明完全正则空间，那么 $(X, \mathscr{T})$ 至 $I(L)$ 的全体连续函数族是区别点与闭集的。

有了这些准备，我们就得到一个主要结果：

定理 11　$(X, \mathscr{T})$ 是不分明 Tychonoff 空间当且仅当它能在中同胚地嵌入至不分明方体 $C(L)$。

7　不分明度量化问题[5,13,21]

不分明伪度量空间已有若干较好工作，但对于重要的不分明度量空间连其自身的定义也仍在讨论之中。这里的问题或许起因于不分明拓扑空间中分离性是颇为复杂的。一种解决办法是选定标准空间作为不分明度量空间，从而得出相应的分离性。鉴于 $I(L)$ 是具有一系列良好性质的不分明拓扑空间，我们还用它的积空间（不分明方体）作为标准空间完成

了嵌入理论，取 $I(L)$ 作为不分明度量空间似乎是合理的。本节将作为嵌入理论的一个应用，通过嵌入到可数个 $I(L)$ 的积空间的手段来建立著名的 Урысон 度量化定理的不分明推广，证明每个具有可数拓扑基的不分明完全正则空间的次 T_0 化（参见下文）是不分明度量空间。这个方面一个结果已见于文献［12］，但由于我们直接了当地诉诸嵌入理论，因而不但证明本身较为简明，而且从结果看，由于分离性提得较有背景，也似乎自然些。

因为通常一致空间是伪度量的当且仅当它有一个可数的一致结构基，所以我们可以从具有可数基的不分明一致结构角度来引进不分明伪度量如次，此时由一致结构导出的不分明拓扑（参看定义7）也看作相应不分明伪度量诱出的不分明拓扑。

定义 11 X 上一个不分明伪度量是指一组映射 $D_r: L^X \to L^X$，$r \in (0,\infty)$，满足下列条件：

(1) $D_r(0)=0$。

(2) D_r 是增值保并映射。

(3) $\forall r,s>0$，$D_r \circ D_s \leqslant D_{r+s}$。

(4) $\bigvee\limits_{0<t<r} D_t(\lambda)=D_r(\lambda)$。

(5) $D_r^{-1}=D_r$。

此时偶对 (X,D_r) 称作不分明伪度量空间。若它在诱出拓扑下还是次 T_0 空间，则称作不分明度量空间。

命题 9 不分明伪度量空间的子空间是可伪度量化的。

设 $(X,\mathscr{T})$ 为不分明拓扑空间。今在 X 的通常点之间引入关系～：对 $x,y\in X$，$x\sim y$ 当且仅当对 $\forall\lambda\in L$，$\lambda\neq 0$，有 $x_\lambda\in\overline{y_\lambda}$ 及 $y_\lambda\in\overline{x_\lambda}$。易见关系～是等价关系，因而得到商集 $\tilde{X}$ 与商空间 $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{T}})$。不难看出作为不分明拓扑空间，$(\tilde{X},\tilde{\mathscr{T}})$ 是次 T_0 的，我们称它为 $(X,\mathscr{T})$ 的次 T_0 化。

定理 12 设 $(X,\mathscr{T})$ 是具有可数拓扑基的不分明拓扑空间。那么 (1) $(X,\mathscr{T})$ 是不分明可度量空间当且仅当它是不分明完全正则的次 T_0 空间。(2) 若 $(X,\mathscr{T})$ 是不分明完全正则的，则其次 T_0 化是不分明可度量的。

8 不分明 Stone-Čech 紧化[22]

不分明拓扑空间中紧性也是较难处理的一个基本概念。文献中已有多种不分明紧性的定义出现。或许较有前途是所谓良紧性及其推广[24,25]。至于紧化的研究只限于由通常拓扑生成的一类较特殊的不分明拓扑空间中进行，其总的思路是把这个问题回归到通常拓扑空间的 Stone-Čech 紧化的问题。现在作为嵌入理论的另一应用，我们将给出一般的不分明拓扑空间的 Stone-Čech 紧化理论。我们使用的紧性是良紧性，它是借助不分明网的收敛来界定的。在本节，值域 L 将取为实单位区间 I。

定义 12 设 $L=I$。(1) 设 $S=\{s(n),\ n\in D\}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的不分明网，这里 D 为定向集，$s(n)$ 为从属度为 λ_n 的不分明点。通常半开区间 $(0,1]$ 上通常网 $V(s)=\{\lambda_n, n\in D\}$ 称作 S 的值网。若 $V(s)$ 在实拓扑下收敛于 $\alpha\in(0,1]$，则称 s 为 α 网。(2) 不分明集 A 称作良紧的，若 A 中每个 α 网都有从属度为 α 的聚点。(3) 当 $A=X$ 时，即 X 为良紧时，称 $(X,\mathscr{T})$ 为良紧空间。

定理 13　若干良紧空间的积空间是良紧的。

定理 14　当 $L=I$ 时，$I(L)$ 与不分明方体 $C(L)$ 是良紧的。

定义 13　不分明拓扑空间 $(Y,\mathscr{U})$ 称作 $(X,\mathscr{T})$ 的紧化，若存在由 $(X,\mathscr{T})$ 至 $(Y,\mathscr{U})$ 的在中同胚 f 使得 $\overline{f(X)}$ 是良紧的且 supp $\overline{f(X)}=Y$。

定理 15　设 $(X,\mathscr{T})$ 是不分明 Tychonoff 空间则存在其一个紧化 $\beta(X)$ 使每个从 $(X,\mathscr{T})$ 至不分明方体 $C(L)$ 的连续映射能连续地扩充至 $\beta(X)$。这个 $\beta(X)$ 就称作 $(X,\mathscr{T})$ 的 Stone-Čech 紧化。

参 考 文 献

[1] Ehresmann, C., Gattungen von localen Structuren, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 60 (1957), 59—77.

[2] Johnstone, P. T., The point of pointless topology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8(1983), 41-53.

[3] Pu, Bao-ming and Liu, Ying-ming. A survey of some aspects on the research work of fuzzy topology in China, (Ed, Wang P. P.), Advances in Fuzzy Set Theory and Application. Plenum, 1983. 31—36.

[4] Hutton, B., Uniformities on fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 58(1977), 559—571.

[5] Erceg, M. A., Metric spaces in fuzzy set theory, *ibid.*, 69(1979), 205—230.

[6] Pu, Bao-ming and Liu, Ying-ming, Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, ibid., 76 (1980), 571—599.

[7] ________, Fuzzy topology II. Product and quotient spaces, *ibid.*, 77(1980), 20—37.

[8] Liu, Ying-ming, Compactness and Tychonoff theorem in fuzzy topological spaces. *Acta Mathematica Sinica*, 24(1981), 260—268. (in Chinese).

[9] ________________. A pointwise characterization of fuzzy completely regularity and imbedding theorem in fuzzy topolgical spaces, *Scientia Sinica* (Series A), 26(1983), 138—147.

[10] Wang, Guo-Jun, Topological molecular lattices (I), *Sanshi Sida Xuebao*, 1(1979) 1—15. (in Chinese).

[11] ____________, A new fuzzy compactness defined by fuzzy Nets. *J. Math. Annl. Appl.*, 94 (1983), 1—23.

[12] Peng, Yuwei, Fuzzy function spaces, *Kexue Tongbao*, 28(1983), 836—836.

[13] Liang, Jihua, Some problems on fuzzy metric spaces, ibid., 28 (1983). 644—646.

[14] Hutton, B., Normality in fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 50 (1975), 74—79.

[15] Liu, Ying-ming, A note on compactness in fuzzy unit interval, *Kexue Tongbao* 25 (1980), *A special issue of Math., Phy,. and Chem.*, 33—35. (in Chinese).

[16] ______________; Neighborhood structures in fuzzy topological spaces, *Kexue Tongbao*, 27(1982), 1243—1244.

[17] ______________; An analysis on fuzzy membership relation in fuzzy set theory, 数学年刊, 5A(1984), 461—466.

[18] ____________; Intersection operation on union-preserving mappings in completely distributive lattices, *J. Math. Anal. Appl.*, 84(1981), 219—225.

[19] ______________, A note of intersection operation on union-preserving mappings in lattices, *Fuzzy Math*, 3(1983), 2: 43-46 (in Chinese).

[20] ______________, Inverse operation on union-preserving mappings in lattices and its applications to fuzzy uniform spaces, Proc. 12th Int. Symp. Multiple-Valued Logic, *IEEE*, 1982, 280-288.

[21] ______________, Fuzzy metrization——an application of fuzzy imbedding theory 数学研究与评论, 3(1984), 17—21.

[22] ______________, On the fuzzy Stone-Čech compactification, *Kexue Tongbao*, 27 (1982), 7:799.

[23] Rodabaugh, S. E., Separation axioms and the fuzzy real lines, *Fuzzy Sets and Systems*, 11 (1983), 163-183.

[24] Li, Zhougfu, Compactness in fuzzy topological spaces, *Kexue Tongbao*, 29 (1984), No. 4, 321—323.

[25] Wang, Guojun, Generalized topological molecular lattices, *Scientia Sinica*, 26 (1983), series A, 12:1063—1072.

Fuzzy Imbedding Theory and Its Applications

Liu Yingming (刘应明)

(Institute of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, China)

Abstract

This paper deals with the imbedding problem in the lattices with a topology. Precisely, we discuss the imbedding problem in L-fuzzy topological space, where L is a fuzzy lattice. Some fundamental results such as the fuzzy unit interval, Q-neighborhood structure and algebraic properties of union-preserving maps in lattices are collected. A pointwise characterization of fuzzy complete regularity is yielded by means of the Q-neighborhood structures and some algebraic properties of certain class of maps in lattices. The Weil theorem on fuzzy uniformity and the general imbedding theorem in the fuzzy basic cube are established. As applications of the imbedding theorem, a fuzzy version of the well-known Urysohn metrizable theorem and the general theory of the fuzzy Stone-Čech compactification are given,