

## 平面图理论与四色问题(III)

### ——由四色问题引出的理论工作\*

刘彦佩

(中国科学院应用数学研究所)

#### §11 Heawood 方程<sup>[1-4]</sup>

在 §10 中讨论了研究平面图的面着色只需考查范平面图。且由定理 10.5, 将四色问题化为确定如下模 3 方程是否有全非 0 (mod 3) 解的问题:

$$\sum_{v \in B(f)} \xi(v) = 0 \pmod{3}, f \in F. \quad (11.1)$$

**命题 11.1** 方程 (11.1) 中独立方程数为  $\varphi - 1$ 。

其中,  $\varphi$  为图中面的数目。

**证明** 由于每个节点与三个面关联,

$$\sum_{f \in F} \sum_{v \in B(f)} \xi(v) = 3 \sum_{v \in V} \xi(v) = 0, \pmod{3}.$$

又, 对  $f_0 \in F$ ,

$$\sum_{f \in F - \{f_0\}} \sum_{v \in B(f)} \xi(v) = 2 \sum_{v \in B(f_0)} \xi(v). \quad \blacksquare$$

**命题 11.2** 对于范平面图,  $v > \frac{5}{3}(\varphi - 1)$ 。

**证明** 由 3-正则和每面至少有 5 条边界边, 可得  $3v \geq 5\varphi$ . 即  $3v \geq 5(\varphi - 1) + 5$ . 从而,  $v > \frac{5}{3}(\varphi - 1)$ . ■

可见, 方程 (11.1) 中变量数多于独立方程数. 又, 任取  $\xi(v)$  为 1, 或 -1 (即 2), (11.1) 的常数只能取 0, -1, 或 1. 从而, Heawood 想通过研究如下方程 (11.2) 对  $a_f$  的可解性导向 (11.1):

$$\sum_{v \in B(f)} \xi(v) = a_f \pmod{3}. \quad (11.2)$$

称此方程为  $\Gamma$  方程. 由命题 11.2,  $\xi$  有多于  $2^{\frac{5}{3}(\varphi-1)} \approx 3.16^{\varphi-1}$  种取值方式. 而常数项有  $3^{\varphi-1}$  种可能方式. 粗看来, (11.2) 无解的可能很小. 在这方面, 首先, Heawood 论证了即使  $\varphi$  很大 (11.2) 也总有无解情况. 进而, 即使将二相邻面变为一个面使变量相对独立方程增大也不能保证 (11.2) 在任何情况下都有解. 当然, 否则即可导出四色定理.

\*1982年4月21日收到.

令图 11.1 所示为某范平面图的一部分. 对任一圈  $C$ , 由 Jordan 公理可将与之关联的面分为二类:

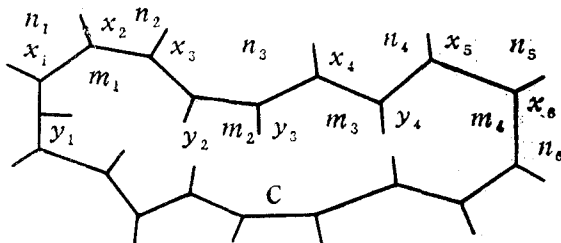


图 11.1

$F_C = F_{in} + F_{out}$ ,  $F_{in} = \{f | f \cap C_{in} \neq \emptyset\}$ ,  $F_{out} = \{f | f \cap C_{out} \neq \emptyset\}$ . 对任一节点  $v \in V(C)$ , 记

$$\xi(v) = \begin{cases} x_v, & \text{当与 } v \text{ 关联面中有二属于 } F_{out}; \\ y_v, & \text{否则.} \end{cases}$$

且对任  $f \in F_{in}$ , 记  $m_f = \sum_{v \in B(f)} \xi(v) - \sum_{v \in V(C) \cap B(f)} \xi(v)$ , 和  $f \in F_{out}$ , 记  $n_f = \sum_{v \in B(f)} \xi(v) - \sum_{v \in V(C) \cap B(f)} \xi(v)$ . 这样, 对此圈  $C$ , 得二  $\text{mod} 3$  数串  $n_1 n_2 \cdots n_i$ ,  $n_{i+1} = n_1, m_1 m_2 \cdots m_j, m_{j+1} = m_1$ , 分别称为  $C$  的外数串和内数串. 并用大写字母  $A, B, \dots$  表示一个数串, 或其中一段. 在这些数串上定义如下的约化运算  $Op$ :

$$Op_{\hat{n}}(A_{p_n q} B) = \begin{cases} A(p+1) \hat{p}(q+1) \hat{q} B, & \text{当 } n \equiv -1 \pmod{3}; \\ A(p-1) \hat{p}(q-1) \hat{q} B, & \text{当 } n \equiv 1 \pmod{3}; \\ A(p+q) \hat{n} B, & \text{当 } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

其中  $\hat{x}$  表示  $x$  在数串中的位置. 相应约化运算在图上为将相邻二面或相继三面合而为一使得从一个范平面图变为一个较小的范平面图. 可见, 任何一个数串经过约化运算之后在这里的条件下只能达到  $00; 12$  或  $21; 0$ . 这些称为终状态.

对任一数串  $N = n_1 n_2 \cdots$ , 记  $\sigma(N) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \pmod{3}$ .

**命题 11.3** 对任何数串  $N$  和  $n \in N$ , 总有  $\sigma(Op_{\hat{n}}(N)) = \sigma(N) \pmod{3}$ .

**证明** 由  $Op$  运算的定义直接可得. ■

为方便, 记  $pqr \cdots \subset N$  表示  $pqr \cdots$  为  $N$  中相继的一段数字.

**命题 11.4** 对任一数串  $N$  和  $p, q \in N$ , 总有

$$Op_{\hat{p}}(Op_{\hat{q}}(N)) = Op_{\hat{q}}(Op_{\hat{p}}(N)).$$

**证明** 只需考虑  $pq \subset N$  和  $psq \subset N$  二情况. 且仅取  $p \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $q \equiv 0 \pmod{3}$  为例. 这时, 记  $N = AapqbB$  和  $AapsqbB$ , 有

$$Op_{\hat{p}}(Op_{\hat{q}}(N)) = Op_{\hat{p}}(Op_{\hat{q}}(Aa1obB)) = Op_{\hat{p}}(Aa(b+1)B) = Aa(b+1)B;$$

$$Op_{\hat{q}}(Op_{\hat{p}}(N)) = Op_{\hat{q}}(Op_{\hat{p}}(Aa1obB)) = Op_{\hat{q}}(A(a+2)2bB) = Aa(b+1)B.$$

$$Op_{\hat{p}}(Op_{\hat{q}}(N)) = Op_{\hat{p}}(Op_{\hat{q}}(AapsqbB)) = Op_{\hat{p}}(Aap(s+b)B) = A(a+2)(s+b+2)B;$$

$$Op_{\hat{q}}(Op_{\hat{p}}(N)) = Op_{\hat{q}}(Op_{\hat{p}}(AapsqbB)) = Op_{\hat{q}}(A(a+2)(s+2)qbB) = A(a+2)(s+b+2)B. ■$$

**引理 11.1** 任何一数串  $N$ , 其终状态唯一确定.

**证明** 对于短的数串易验证. 一般情况, 由命题 11.4, 用归纳法即得. ■

若在  $C$  上有二个相邻的节点为同类变量, 可作如下约化运算, 如图 11.2 所示,  $Op_{x_i}$

或  $OP_{yy}$ .

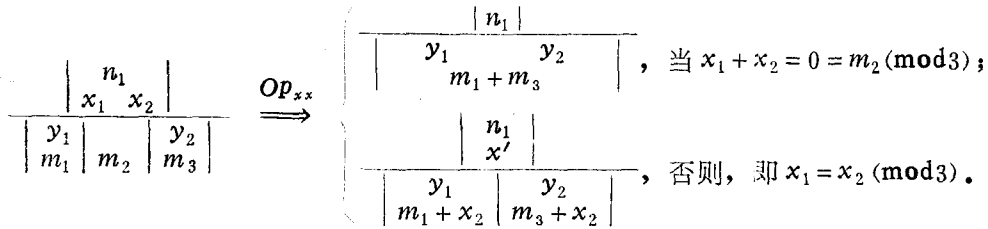


图 11.2

**命题 11.5** 对任一圈  $C$ , 其上节点可通过  $OP_{xx}$ , 或  $OP_{yy}$  变换为  $(x, y; x, y) = x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k, k \geq 2$ , 或  $(x, x; y, y) = x_1 x_2 y_1 y_2$ .

**证明** 若圈长大于 4 且非  $(x, y; x, y)$ , 则必存在二相邻节点为同类变量. 从而, 可行  $OP_{xx}$  或  $OP_{yy}$ . 由长度的有限性即得. ■

若在  $(x, y; x, y)$  中有如图 11.3 的结构, 则依如下方式调整变量使得当  $x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 \neq 12121$  时至少减少一个变量且保持  $\sigma(N), \sigma(M)$  不变. 如

$$11111 \rightarrow \otimes 2 \otimes 21,$$

$\otimes$  指去掉了相应位置的变量. 且随之  $m' m_1 m_2 m'' \subset M$  变为  $OP_{m_1}(m' oom'') = m' m''$ .

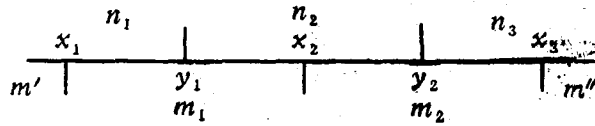


图 11.3

**命题 11.6**  $(x, y; x, y)$  经调整和约化运算  $OP_{n_i}, OP_{m_i}, OP_{xx}, OP_{yy}$  之后, 必或得  $1212\dots$ , 或  $x_1 y_1 x_2 y_2$ , 或  $x_1 x_2 y_1 y_2$ .

**证明** 与命题 11.5 相仿地可得. ■

**命题 11.7** 若  $(x, y; x, y) = 1212\dots$ , 则  $N$  与  $M$  有相同的终状态.

**证明** 因这时  $M = N$ . ■

**命题 11.8** 在任何  $x_1 x_2 y_1 y_2$  和  $x_1 y_1 x_2 y_2$  的取值下,  $M$  和  $N$  均为相同的终状态.

**证明** 由  $\sigma(M) = \sigma(Y) - \sigma(X), \sigma(N) = \sigma(X) - \sigma(Y)$ . 仅取  $\sigma(M) = \sigma(N)$  为例. 这时,  $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ . 有如下表:

$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$m_1$	$m_2$	$n_1$	$n_2$	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$m_1$	$m_2$	$n_1$	$n_2$
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	1	2	1
2	2	2	2	0	0	0	0	2	2	2	2	1	2	1	2
1	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0	0	0	0
2	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	0	0	0	0

当  $n, m = \sum_{v \in B(f) \cap \nu(C)} \xi(v)$ . 其他情况可类推. ■

**引理 11.2** 对任一圈,  $M$  和  $N$  有相同的终状态.

**证明** 由命题 11.5—8 自明. ■

**命题 11.9** 设  $C_1, C_2$  为一面环的外圈和内圈,  $M_1$  与  $N_2$  有相同的终状态.

**证明** 因这时  $\sigma(M_1) = \sigma(N_2) = 0 \pmod{3}$ , 且同一面上的  $m_1$  与  $n_2$  互补. 再由终状态的互补性, 直接可得. ■

在一个范平面图中, 一圈  $C$ , 若将一个与  $C$  关联在  $C$  外的面加进, 如图 11.4, 且使  $\sum_{i=1}^r y_i + \sum_{j=1}^r x_j + u + u' = 0 \pmod{3}$ , 或者说 0 面. 这样, 可得二个数串  $M' = Akmk'B$  和  $M = A(k+x_1)m_1 \cdots m_{r-1}(k'+x_r)B$ .

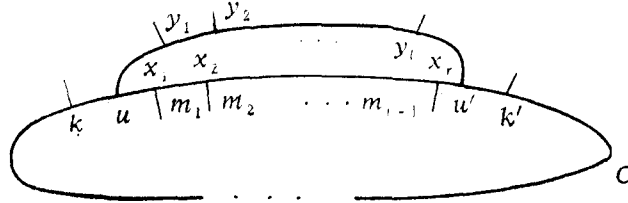


图 11.4

**引理 11.3** 如上的  $M', M$  有相同的终状态,

**证明** 只要证  $kmk'$  与  $(k+x_1)m_1 \cdots m_{r-1}(k'+x_r)$  有相同终状态即足. 对于前者, 由于  $m = 2s \pmod{3}$ ,  $s = \sum_{i=1}^r x_i$ , 其终状态分别依  $s=0$  或  $s \neq 0$  而为  $k+k'$  或  $(k+s)(k'+s)$ ; 对后者, 若终状态中无  $x$ , 这时必  $s=0$ , 则为  $k+k'$ . 否则, 所含的  $x=s$ , 由和不变性, 为  $(k+x)(k'+x)$ . 即  $(k+s)(k'+s)$ . ■

**定理 11.1** 一个范平面图,  $f_0, f_1$  为二相邻面. 若取

$$a_f = \begin{cases} 0, & \text{当 } f \neq f_0 \text{ 或 } f_1; \\ 1, & \text{当 } f = f_1; \\ 2, & \text{当 } f = f_0, \end{cases}$$

则方程 (11.2) 无解.

**证明** 若否, 则存在  $\xi(v) = 1$ , 或  $2 \pmod{3}$  使得除  $f_0, f_1$  外  $a_f = 0 \pmod{3}$ . 然, 这时由引理 11.2,  $B(f_0) \oplus B(f_1)$  外数串的终状态必为 12. 进而, 由引理 11.3 和命题 11.9, 可递推至圈外只含二相邻面与其值为 00 矛盾. ■

Heawood 曾估计方程 (11.2) 中若除二相邻面对所有  $a_f$  皆有解. 然后, 其齐次方程解导致 (11.1) 的解. 由此解决四色问题. 可惜, 他发现了一个反例.

## §12 Hamilton 平面图<sup>[5-11]</sup>

对于平面图  $G$  上的任一圈  $C$ , 分别称  $G \cap C_{in}$  和  $G \cap C_{out}$  中的每个连通部分为  $G$  对  $C$  的内桥和外桥. 通常记  $B_{in}, B_{out}$ . 其集族为  $\mathcal{B}_{in}, \mathcal{B}_{out}$ . 统记为  $B, \mathcal{B}$ . 有时  $B(C), \mathcal{B}(C)$ . 而  $[B] = B \cup B(B)$  为  $G$  的子图,  $B$  的边界  $B(B)$  中的节点称为触点,  $B(B)$  也称为触点集.  $\alpha(B; C) = |B(B(C))|$  为  $B$  与  $C$  的触点数. 自然; 由 2-连通性, 对任  $B \in \mathcal{B}$ , 总有

$$\alpha(B; C) \geq 2. \quad (12.1)$$

若  $G$  上一条路  $P$ , 存在  $G$  中一圈, 称为  $P$ -圈, 使得  $P \subset C$ , 即谓  $P$  为  $C$  的一段, 则称  $P$  为圈路. 且记  $]P[ = P - B(P)$ , 即从  $P$  中去掉二端点. 二圈  $C_1, C_2$ , 若  $C_{1in} \subset C_{2in}$ , 则称  $C_2$  包围  $C_1$ , 记  $C_2 \succ C_1$ . 所谓桥  $B_1$  包围  $B_2$ , 即  $C \cup B_1$  作为平面图, 存在一面  $f \in F(C \cap B_1)$  使得

$B_2 \subset f$ . 由对称性, 记  $B_1 \times B_2$ . 一个  $P$ -圈, 若不存在任何包围它的  $P$ -圈, 则称之为极小的. 可见, 对任一圈路至多有二个通过它的圈是极小的, 对于 3-连通图则恰有二个. 当然, 由圈内、外的相对性, 上述概念也具相对性.

**命题 12.1** 对于任一极小  $P$ -圈  $C$  和  $B_{in} \in \mathcal{B}_{in}(C)$ , 总有  $|[B_{in}] \cap (C - ]P[)| \leq 1$ .

**证明** 否则, 若  $b_1, b_2 \in [B_{in}] \cap (C - ]P[)$ , 则存在一路  $P(b_1, b_2) \subseteq [B_{in}]$  与  $C$  中含  $P$  从  $b_1$  到  $b_2$  段形成的圈被  $C$  所包围. 与  $C$  的极小性矛盾. ■

一个  $P$ -圈  $C$ , 所有使得  $|P \cap [B_{in}]| \geq 2$  的桥  $B_{in}$  称为对  $P$  非奇异; 否则, 奇异. 由命题 12.1, 一个极小  $P$ -圈  $C$ , 那些与  $C-P$  无触点的桥称为  $\delta_0$  桥. 只有一个触点的称为  $\delta_1$  桥. 有时, 为明确, 记  $B_{\delta_0}(C-P), B_{\delta_1}(C-P)$ .

在一平面图  $G$  上, 任一边  $e_0 \in E$ , 由 2-连通性, 有二个极小  $e_0$ -圈, 即  $C_0 = B(f_0), C_1 = B(f_1), f_0, f_1$  为与  $e_0$  关联的二面. 除非  $C_1 = C_2$ , 当  $G = C_1$  外, 总有  $e_1 \in E(C_1), e_1 \neq e_0$ . 令  $P_{C_1}(e_0, e_1)$  为  $C_1$  上连  $e_0, e_1$  的一段. 由 3-连通性, 记另一极小  $P_{C_2}(e_0, e_2)$ -圈为  $C_2$ .

**命题 12.2**  $C_2$  包围  $C_0$  且  $C_0 = P_{C_1}(e_0, v_0) \cup P(v_0, w_0) \cup P_{C_2}(w_0, e_0), ]P(v_0, w_0)[ \subset C_{2in}$ .

**证明** 由  $C_{0in} \subset F$  和  $C_2$  的极小性直接可得. ■

设  $C$  为任一  $P_{C_1}(e_0, e_1)$ -圈, 则沿  $C$  有与  $C_2$  相遇和离开的节点叙列. 记  $e_0 = (x_0, y_0), e_1 = (u_1, v_1)$ , 有(图 12.1)

$$x_0, x_1; x_2, x_3; \dots; x_{2k}, v_1$$

使得

$$C(x_i, x_{i+1}) \begin{cases} \subset C_2(x_i, x_{i+1}), & \text{当 } i=0(\text{mod}2), \text{ 称为共段;} \\ \cap ]C_2(x_i, x_{i+1})[ = \emptyset, & \text{当 } i=1(\text{mod}2), \text{ 称为分满.} \end{cases}$$

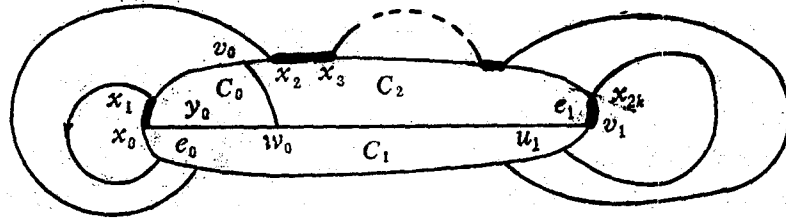


图 12.1

**命题 12.3**  $\mathcal{B}(C) = \mathcal{B}_\delta(C) + \mathcal{B}_\gamma(C) + \mathcal{B}_\mu(C)$ , 其中  $\mathcal{B}_\delta(C) = \{B | B \subset C_{2in}\}, \mathcal{B}_\gamma(C) = \{B | B \subseteq [C_{2out}]\}, \mathcal{B}_\mu(C) = \{B | (B \cap C_{2in} \neq \emptyset) \wedge (B \cap [C_{2out}] \neq \emptyset)\}$ .

**证明** 任  $B \in \mathcal{B}$  均属三者之一, 且它们无公共元素. ■

若此  $P_{C_1}(e_0, e_1)$ -圈  $C$  满足: 对任  $B \in \mathcal{B}(C)$ , 有

$$a(B; C) \begin{cases} = 2, & \text{当 } B \cap C_i \neq \emptyset, i=1, \text{ 或 } 2; \\ \leq 3, & \text{否则.} \end{cases}$$

这时, 称  $C$  为  $G$  的弛圈. 这个条件称为弛圈条件.

令图  $G' \infty G - E(C_{2in}), E(C_{2in}) = \{e | e \cap C_{2in} \neq \emptyset\}$ , 且规定  $G'$  中所有节点的次至少为 3. 记  $e'_1 = P_{C_1}(e_0, e_1)$ ,

**引理 12.1** 设  $C'_1, C'_2$  为  $G'$  中极小  $e'_1$ -圈. 若  $G'$  中  $\neg P_{C'_i}(e'_1, v_0)$ -圈  $C'$  是弛圈, 则在  $G$  中  $C'$  相应的  $P_{C_1}(e_0, e_1)$ -圈  $C$  满足: 对任  $B \in \mathcal{B}(C)$ , 有

$$\alpha(B; C - P_{C_1}(e_0, e_1)) \begin{cases} = 2, & \text{当 } B \cap C_i \neq \emptyset, i = 1, \text{ 或 } 2; \\ \leq 3, & \text{否则.} \end{cases}$$

**证明** 由命题 12.1 和  $\mathcal{B}_\nu(C') = \mathcal{B}_\nu(C)$ , 只需讨论  $B \in \mathcal{B}_\mu(C)$ . 然, 这时  $B \cap [C_{2, \text{out}}] \in \mathcal{B}_\nu(C')$ . 又, 与  $C_2$  有公共边. 从而, 也有结论. ■

**引理 12.2** 对  $G'$  上的  $P_{C'_i}(e'_1, v_0)$ -弛圈  $C'$ , 在  $G$  中相应  $C$ , 有  $C_0$  上的路  $P(v_0, w_0) \subset B \in \mathcal{B}_\delta(C)$  且为  $\delta_1$ -桥.

**证明** 由命题 12.1 及  $C'$  的性质直接可得. ■

**引理 12.3** 对  $G'$  上的任一  $P_{C'_i}(e'_1, v_0)$ -弛圈  $C'$ , 在  $G$  中相应  $C$ , 有任何不满足弛圈条件的桥  $B \in \mathcal{B}_{in}(C_2)$  对  $P_{C_1}(e_0, e_1)$  皆非异.

**证明** 由命题 12.1, 即得. ■

若  $B \in \mathcal{B}(C)$  不满足弛圈性质, 则引进图

$$H(C, B) = C + \bigcup_{B_1 \rightarrow B} B_1 \subset G.$$

其中  $B_1 \rightarrow B$ , 即  $B$  在  $P_{C_1}(e_0, e_1)$  上触点间一段含所有  $B_1$  的触点. 记  $P(b_1, b_2)$  为  $B$  在  $P_{C_1}(e_0, e_1)$  上触点间最长段.

**引理 12.4** 令  $B_{\delta_0} \in \mathcal{B}(C)$  为不满足弛圈条件的  $C_2$  的  $\delta_0$ -桥. 若  $H(H, C)$  上有形如  $C(B_{\delta_0}) = C(b_2, e_1, e_0, b_1) \cup S(b_1, P_{\delta_0}, b_2)$  的弛圈, 则  $\mathcal{B}_G(C(B_{\delta_0})) = \mathcal{B}_G(C) - \{B_{\delta_0}\} \cup \mathcal{B}_H(C(B_{\delta_0}))$  且所有  $\mathcal{B}_H(C(B_{\delta_0}))$  中的桥在  $G$  中皆满足弛圈条件.

**证明** 从  $H(C, B_{\delta_0})$  的结构即可得. ■

**引理 12.5** 令  $B_{\delta_1} \in \mathcal{B}_\delta(C)$  为  $G$  中不满足弛圈条件的  $C_2$  的  $\delta_1$ -桥. 若  $H(C, B_{\delta_1})$  有形如  $C(B_{\delta_1}) = C(b_2, e_1, e_0, b_1) \cup S(b_1, P_{\delta_1}, b_2)$  的弛圈, 则  $\mathcal{B}_G(C(B_{\delta_1})) = \mathcal{B}_G(C) - \{B_{\delta_1}\} \cup \mathcal{B}_H(C(B_{\delta_1}))$ , 且所有  $\mathcal{B}_H(C(B_{\delta_1}))$  中的桥在  $G$  中全满足弛圈条件.

**证明** 若  $C_0(v_0, w_0) \supset B_{\delta_1}$ , 与引理 12.5 同样可得. 否则, 由引理 12.2, 在  $C - P_{C_1}(e_0, e_1)$  上只有一个触点  $v_0$ . 这时, 以  $C$  和  $C_0$  为极小  $P_{C_0}(e_0, v_0)$ -圈, 由引理 12.1 可得. ■

**引理 12.6** 令  $B_\mu \in \mathcal{B}_\mu(C)$  为  $G$  中对  $C$  不满足弛圈条件的  $\mu$ -桥. 若  $H(C, B_\mu)$  有形如  $C(B_\mu) = C(b_2, e_1, e_0, b_1) \cup S(b_1, P_\mu, b_2)$  的弛圈, 则也有  $\mathcal{B}_G(C(B_\mu)) = \mathcal{B}_G(C) - \{B_\mu\} \cup \mathcal{B}_H(C(B_\mu))$ , 且所有  $B \in \mathcal{B}_H(C(B_\mu))$  在  $G$  中也全满足弛圈条件.

**证明** 由引理 12.1,  $B_\mu \cap [C_{2, \text{out}}]$  与  $C$ , 从而, 与  $C(B_\mu)$  恰有二个触点  $u_1, u_2$ . 其结构如图 12.2. 又由引理 12.1, 含  $P(b_1, b_2)$  中边的桥与  $C(B_\mu)$  恰有二个触点. 其他自明. ■

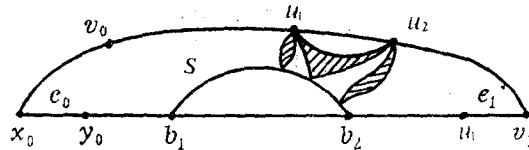


图 12.2

**引理 12.7** 在任一 2-连通平面图  $G$  上, 若  $C_0, C_1$  为对某边  $e_0$  的二极小  $e_0$ -圈,  $C_1, C_2$  为二极小  $P_{C_1}(e_0, e_1)$ -圈,  $e_1 \subset C_1$  但  $e_1 \not\subset C_0$ , 则存在一个  $P_{C_1}(e_0, e_1)$ -弛圈.

**证明** 当  $G$  中边少时易验证. 又,  $C_0(v_0, w_0) \subset C_{2in}$ , 如图 12.1, 从而,  $G' \infty G - E(C_{2in})$  比  $G$  边少. 这样, 由归纳假设, 有引理 12.1—3. 然, 若  $G'$  上的弛圈  $C'$  相应  $G$  中的  $C$  非弛圈, 则由命题 12.3, 只能  $\mathcal{B}_\delta, \mathcal{B}_\mu$  中的桥不满足弛圈条件. 对这样的桥形成  $H(C, B)$ . 因其边也少于  $G$ . 故, 由归纳假设可由引理 12.4—6 得一弛圈. ■

**定理 12.1** 任何非 3-点可分离的平面图必有 Hamilton 圈.

**证明** 由引理 12.7 和非 3-点可离性. 则此图上的任一弛圈皆 Hamilton 圈. ■

这个定理揭示了 4-连通平面图的深刻性质. 然而, 对于平面图的面着色的四色问题, 由推论 9.1, 只需考查 3-连通平面图的 Hamilton 性. 不幸地是发现了 3-连通、3-正则平面图无 Hamilton 圈的例子. 这就是人们称的 Tutte 图. 图 12.3.

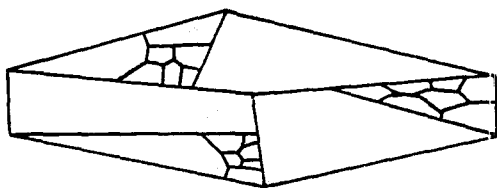


图 12.3 Tutte 图

关于点着色, 就需研究极大平面图. Whitney 发现了极大平面图有 Hamilton 圈的条件.

**定理 12.2** 一个极大平面图, 如果无分离三角形, 则存在 Hamilton 圈.

**证明** 由命题 4.3, 这里的极大平面图非 3-点可分离. 从而, 由定理 12.1 即得. ■

基于此, 又可得出四色问题与 Hamilton 性的关系的结果.

**定理 12.3** 平面图 4-点可着色, 当且仅当 Hamilton 平面图 4-点可着色.

**证明** 必要性了然.

充分性: 若有一个最小的 5 色平面图  $G$ . 自然, 由约化性, 必为极大平面图. 而, 如有分离三角形  $T$ , 则由  $G \cap [T_{in}]$  和  $G \cap [T_{out}]$  的 4-着色至多在其一上作色置换可使得在  $T$  上的着色相同. 这就可合成全图的 4-着色. 否则, 由定理 12.2, 必有 Hamilton 圈. 又, 由条件导致全图 4-可着色. ■

### §13 Hadwiger 猜想<sup>[12-26]</sup>

二个图  $G_1, G_2$ , 一个映象  $\tau: V_1 \rightarrow V_2$  使得对任  $u_2, v_2 \in V_2, (u_2, v_2) \in E_2$  都存在  $u_1, v_1 \in V_1, (u_1, v_1) \in E_1$  有  $\tau(u_1) = u_2, \tau(v_1) = v_2$ , 则称之为  $G_1, G_2$  间的一个同态律,  $G_2$  为  $G_1$  的同态. 进而, 若任  $v_2 \in V_2, G_1[\tau^{-1}(v_2)]$  连通, 则称  $\tau$  为压缩映象. 这时,  $G_2$  为  $G_1$  的压缩. 又, 若  $V_2 \subseteq V_1$ , 内压缩. 最简单的是一个节点为一条边的压缩, 称之为边压缩. 可见, 压缩满足传递性和任一压缩均可通过一系列的边压缩实现.

若  $B$  为  $G$  上对于  $S \subseteq V$  的桥, 且  $[B] \cap S = \{v_1, \dots, v_b\}$  非不足道, 即存在  $v \in \{v_1, \dots, v_b\}, v \subset B$ , 则首先将  $B$  中的节点压缩到  $v$ , 然后, 压缩到  $v_1$ . 这样所得的图称为  $G$  的全压缩. 或记  $\tau_B(G)$ .

稍加推广, 即所谓  $H$  是  $G$  的次压缩, 记  $G \succ \cdot H$ : 存在  $G$  的一个内压缩  $G_1$  使得有  $H_0 \subseteq G_1, H_0 \sim H$ . 若进而还有  $V(G_1) = V(H_0)$ , 则称  $G_1$  为确定  $H$  的压缩. 由此, 特别地,  $H$

$\subseteq G$ , 或存在  $H_0 \subseteq G$ ,  $H_0 \infty H$ , 则总有  $H \prec G$ . 然, 反之, 只有下面的命题 13.2. 以及, 当  $G = K_n$  时, 次压缩即压缩. 而且, 任一次压缩都有确定它的压缩.

**命题 13.1** 次压缩有如下性质:

P1, 若  $G \succ \cdot H_1$  且  $H_1 \supseteq H$ , 则  $G \succ \cdot H$ ;

P2, 若  $G \succ \cdot H_1$  和  $H_1 \succ \cdot H$ , 则  $G \succ \cdot H$ ;

P3, 若  $G \supseteq H_1$  和  $H_1 \succ \cdot H$ , 则  $G \succ \cdot H$ .

**证明** 从定义直接可得. ■

**命题 13.2** 若  $H \prec G$ , 且所有  $v \in V(H)$  皆  $\rho_H(v) \leq 3$ . 则存在  $H_0 \subseteq G$ ,  $H_0 \infty H$ .

**证明** 令  $G_1$  为确定  $H$  的压缩. 对任  $v \in V(G_1)$ , 由  $G[\tau^{-1}(v)]$  的连通性和命题 3.3, 在  $G$  中存在  $u \in \tau^{-1}(v)$  有  $\rho_H(v) \leq 3$  条由  $v$  到  $V - \tau^{-1}(v)$  节点不交的路. 从而, 可造出  $G$  的一个子图  $H_0$ ,  $H_0 \infty H$ . ■

为方便,  $L, M$  分别为如图 13.1-2 所示的图.

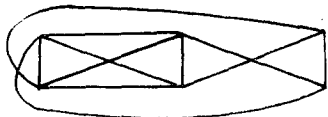


图 13.1: L

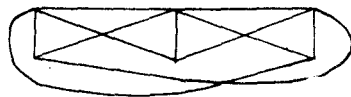


图 13.2: M

**命题 13.3** 若  $G \succ \cdot K_5$ , 则或者存在  $G_1 \subseteq G$  使得  $G_1 \infty K_5$ , 或者  $G \succ \cdot L$ .

**证明** 设  $v_i, i=1, \dots, 5$ , 为确定  $K_5$  的压缩的节点. 若有一个  $\tau^{-1}(v_i)$ , 其中不存在任何节点有与其他四个  $\tau^{-1}(v_i)$  连接的节点不交的路, 由命题 3.4 可知  $G \succ \cdot L$ ; 否则, 存在  $G_1 \subseteq G$ ,  $G_1 \infty K_5$ . ■

**命题 13.4** 若  $G$  3-连通,  $G \asymp K_5$ , 且存在  $G_1 \subseteq G$ ,  $G_1 \infty K_5$ , 则  $G \succ \cdot L$  和  $G \succ \cdot M$ .

**证明** 取  $v_0$  为  $G_1$  中不与  $K_5$  的节点  $v_1, \dots, v_5$  相应的节点. 由 3-连通性,  $v_0$  至少与  $v_i, i=1, \dots, 5$ , 中三个有节点不交的路. 这就使得  $G$  中必有与  $L, M$  同形的子圈. 从而,  $G \succ \cdot L, G \succ \cdot M$ . ■

**定理 13.1** 圈  $G$  非平面的, 当且仅当  $G \succ \cdot K_5$ , 或  $G \succ \cdot K_{3,3}$ .

**证明** 由定理 3.1 必要性了然.

充分性. 由命题 13.3, 和  $G \succ \cdot L \succ \cdot K_{3,3}$ , 只需考虑  $G \succ \cdot K_{3,3}$ . 然, 由命题 13.2, 可知有  $G_1 \subseteq G$ ,  $G_1 \infty K_{3,3}$ . 再由定理 3.1 即得. ■

**Hadwiger 猜想** 任何色数为  $k$  的图  $G$ , 有  $G \succ \cdot K_k$ .

**命题 13.5** 若对  $k=5$  Hadwiger 猜想成立, 则任何平面图 4-可着色.

**证明** 由定理 7.1, 任何平面图  $G$ , 有  $\chi(G) \leq 5$ . 然,  $\chi(G) = 5, G \succ \cdot K_5$ , 则由定理 13.1,  $G$  非平面的. 从而, 平面图  $G$ , 只能  $\chi(G) \leq 4$ . ■

关于对 Hadwiger 猜想的研究, 仅管只解决到  $k \leq 4$  的情况. 然, 所得的结果确多彩多姿.

首先, 值得提及的就是 Halin 的比 Hadwiger 猜想弱的 **命题 H**: 对任一自然数  $k$ , 存在一个自然数  $\varphi(k)$ . 使得对于每个图  $G$ , 只要  $\chi(G) \geq \varphi(k)$  必有  $G \succ \cdot K_k$ . 自然, 若  $\varphi(k) = k$ , 即得 Hadwiger 猜想. 幸运的是这个命题已由 Wagner 完满地解决了. 不幸的是未能证明



$\varphi(k) = k$ .

**定理 13.2** 对任一自然数  $k$ , 存在一个自然数  $\varphi(k)$ , 满足

$$\varphi(k+1) \leq 2\varphi(k) - 1, \quad k \geq 2, \quad (13.1)$$

使得任一圈  $G$ , 只要  $\chi(G) \geq \varphi(k)$  就必有  $G \succ \cdot K_k$ .

**证明**  $k=1$ , 不足道. 也易验证  $\varphi(2)=2, \varphi(3)=3$  满足(13.1). 又, 若  $\chi(G) \geq 2\varphi(k) - 1$ , 取  $v_0 \in V$ , 和分解  $V = \{v_0\} + \sum_{i \geq 1} V_i$ ,  $V_i = \{v \mid d(v, v_0) = i\}$ ,  $d(u, v)$  表示  $G$  中节点  $u, v$  间的距离. 这样, 必存在  $G_j = G[V_j]$  使得  $\chi(G_j) \geq \varphi(k)$ . 因否则  $G_i, i=0 \pmod{2}$  用  $\varphi(k) - 1$  色, 其他用另  $\varphi(k) - 1$  色, 将有  $\chi(G) \leq 2(\varphi(k) - 1) < 2\varphi(k) - 1$ , 与前提矛盾. 由归纳假设,  $G_j \succ \cdot K_k$ . 然, 存在  $v_0$  至  $G_j$  中节点  $k$  条路  $P(v_0, v_i), i=1, \dots, k$ , 使得  $E(P(v_0, v_i)) \cap E(G_j) = \emptyset$ . 即, 有  $G \succ \cdot G_j \cup (\bigcup_{i=1}^k P(v_0, v_i)) \succ \cdot K_{k+1}$ . 从而, 存在  $\varphi(k+1) \leq 2\varphi(k) - 1$ . ■

一个图  $G$ , 若  $G = G_1 \cup G_2$  且  $G_1 \cap G_2 = K_n, G_i - K_n \neq \emptyset, i=1,2$ , 则称之为  $G$  的一个单形分解, 或简记  $G = G_1 \triangle G_2$ . 若不限  $K_n$  的阶, 则记  $G_1 \triangle G_2$ .

**命题 13.6** 若  $G = G_1 \triangle G_2$ , 则  $G$  为  $k$ -可着色,  $k \geq n$ , 当且仅当  $G_1$  和  $G_2$  均  $k$ -可着色.

**证明** 必要性了然. 且, 由  $G_1, G_2$  的  $k$ -可着色, 至多在  $G_1, G_2$  之一上作色置换可使  $K_n$  上的着色相同. 从而, 可合并成  $G$  的  $k$ -着色. ■

任给一图  $H$ , 称为象图, 可将所有图分为二类:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(H) + \mathcal{G}^*(H),$$

其中  $\mathcal{G}(H) = \{G \mid G \succ \cdot H\}$ ,  $\mathcal{G}^*(H) = \{G \mid G \succ \cdot H\}$ . 一图  $G \in \mathcal{G}^*(H)$  若对任  $e \in E(G), G + e \in \mathcal{G}(H)$ , 则称之为极大无  $H$  图.  $\mathcal{G}^*(H) = \{G \mid G \text{ 为极大无 } H \text{ 图}\}$ .  $G \in \mathcal{G}^*(H)$ , 若存在  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}^*(H)$  使得  $G = G_1 \triangle G_2$ , 则称  $G$  为  $\mathcal{G}^*$ -可分解. 否则,  $\mathcal{G}^*$ -不可分解.

**命题 13.7** 任何  $G \in \mathcal{G}^*$  都可表示为

$$G = \bigtriangle_{i \geq 1} G_i \quad (13.2)$$

使得  $G_i, i \geq 1$ , 皆  $\mathcal{G}^*$ -不可分解.

**证明** 逐次作  $\mathcal{G}^*$ -分解可得. ■

对  $G \in \mathcal{G}^*$ , 形如(13.2)的式子称为  $G$  的基表示. 所有  $\mathcal{G}^*$  中  $\mathcal{G}^*$ -不可分解图的集合称为  $\mathcal{G}^*$  的基.

**命题 13.8** 对任何自然数  $k$ , Hadwiger 猜想成立, 当且仅当任  $G \in \mathcal{G}^*(K_k)$  均  $(k-1)$ -可着色.

**证明 必要性** 若存在  $G \in \mathcal{G}^*(K_k), \chi(G) \geq k$ , 由 Hadwiger 猜想,  $G \succ \cdot K_{\chi(G)} \succ \cdot K_k$ . 即  $G \in \mathcal{G}^*(K_k)$ .

**充分性** 因所有  $\mathcal{G}^*(K_k)$  中图的色数均不大于  $k-1$ . 故, 任  $G, \chi(G) = k$ , 只能  $G \in \mathcal{G}(K_k)$ . 即  $G \succ \cdot K_k$ . ■

**定理 13.3** 对任自然数  $k$ , Hadwiger 猜想成立, 当且仅当  $\mathcal{G}^*(K_k)$  中所有基图皆  $(k-1)$ -可着色.

**证明** 由命题 13.7, 和基表示中的分离完备图的阶不可能大于  $k-1$ . 再由命题 13.6

即得.

由此, 研究  $\mathcal{G}_0^*(K_k)$  中的基图, 对于 Hadwiger 猜想有本质的意义.

**命题 13.9**  $\mathcal{G}_0^*(K_4)$  的基为  $\{K_1, K_2, K_3\}$ .

因篇幅所限, 证明从略.

**定理 13.4** 对于  $k < 5$ , Hadwiger 猜想成立.

**证明**  $k = 1, 2, 3$  均易验证. 关于  $k = 4$ , 由命题 13.9,  $\mathcal{G}_0^*(K_4)$  的所有基图皆 3-可着色. 再由定理 13.2 即得.

设二图  $G_1, G_2$  无公共节点, 则记

$$G_1 \circ G_2 = (V_1 + V_2, E_1 + E_2 + V_1 \times V_2),$$

但注意  $V_1 \times V_2$  不计次序. 称  $G_1 \circ G_2$  为  $G_1, G_2$  的合成. 易见,  $G_1 \circ G_2 = G_2 \circ G_1$ .

**命题 13.10** 对任完备图  $K_n, G \circ K_n \succ \cdot H \circ K_n$ , 当且仅当  $G \succ \cdot H$ .

**证明** 充分性了然.

必要性. 设  $\gamma(G \circ K_n)$  为确定  $H \circ K_n$  的压缩. 由此可得  $V(H) = V_1(H) + V_2(H)$ , 其中  $V_1(H) = \{v | \gamma^{-1}(v) \subseteq V(G)\}$ ,  $V_2(H) = \{v | \gamma^{-1}(v) \cap V(K_n) \neq \emptyset\}$ . 且为清楚, 记  $V(G \circ K_n) = V(G) + V(K_n)$ ,  $V(H \circ K_n) = V(H) + V'(K_n)$ . 设  $|V_2(H)| = t$ , 则  $V(K_n)$  中至多  $n - t$  个节点在  $\gamma$  之下映到  $V'(K_n)$  中. 从而,  $V'(K_n)$  中至少有  $t$  个节点, 如  $s'_1, \dots, s'_t$  使得  $\gamma^{-1}(s'_i) \subseteq V(G), i = 1, \dots, t$ . 由此, 可建立一个一一映象  $\tau: \{s'_1, \dots, s'_t\} \rightarrow V_2(H)$ . 则, 如下确定的压缩  $\psi(G)$ :

$$\psi^{-1}(v) = \begin{cases} \gamma^{-1}(v), & \text{当 } v \in V_1(H); \\ \gamma^{-1}(s_i), & \text{当 } v = \tau(s_i) \in V_2(H), \end{cases}$$

即得  $G \succ \cdot H$ .

**定理 13.5** 若对某自然数  $k$ , Hadwiger 猜想成立, 则对任何自然数  $h < k$ , Hadwiger 猜想都成立.

**证明** 对任何  $G \in \mathcal{G}_0^*(K_k)$ , 由命题 13.10, 有  $G \circ K_{k-h} \in \mathcal{G}_0^*(K_k \circ K_{k-h}) = \mathcal{G}_0^*(K_k)$ . 然, 由对  $k$ , Hadwiger 猜想成立. 从而,  $\chi(G \circ K_{k-h}) \leq k - 1$ . 又,  $\chi(G \circ K_{k-h}) = \chi(G) + k - h$ . 即  $\chi(G) \leq h - 1$ .

如上所述, 只要找出  $\mathcal{G}_0^*(K_5)$  的基, Hadwiger 猜想,  $k = 5$  时, 即可解决. 下面结果虽很重要, 篇幅所限, 只引述而不证明.

**命题 13.11**  $\mathcal{G}_0^*(K_5)$  的非平面的基图只有  $H_4$ .

其中,  $H_l = (V_l, E_l)$ ,  $V_l = \{v_1, \dots, v_l; u_1, \dots, u_l\}$ ,  $E_l = \{(v_i, u_i) | 1 \leq i \leq l\} + \{(v_i, v_{i+1}) | 1 \leq i \leq l-1\} + \{(v_1, u_l), (u_1, v_l)\}$ ,  $l \geq 2$ .  $H_2 \sim K_4$ ,  $H_3 \sim K_{3,3}$ . 易见,  $\chi(H_4) = 3$ .

**定理 13.6** 对  $k = 5$ , Hadwiger 猜想成立, 当且仅当所有平面图皆 4-可着色.

**证明** 必要性即命题 13.5.

充分性. 由命题 13.11,  $\mathcal{G}_0^*(K_5)$  的基图除  $H_4$  外皆平面图. 又,  $\chi(H_4) = 3$ , 其他的色数至多为 4. 故, 由定理 13.3 即得.

对于  $K_5 - e$ , 即  $K_5$  中去一边,  $\mathcal{G}_0^*(K_5 - e)$  的基已求出. 这里也只能略去证明.

**命题 13.12**  $\mathcal{G}_0^*(K_5 - e)$  的基为  $\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_{3,3}, \text{三棱柱图}, \text{轮图}\}$ .

**命题 13.13**  $\mathcal{G}_0^*(K_5)$  的所有平面基图皆无分离三角形的极大平面图.

由定理 12.2 和定理 13.3, 又可回到定理 12.3. 然, 这里还可得 Hadwiger 猜想,  $k=5$  情况, 和四色问题的又一种等价说法.

**定理 13.7** 所有平面图 4-可着色, 当且仅当任何 3-点可分而非少于 3-点可分且无子图与  $H_4$  同形的 5 色非平面图  $G$ , 皆  $G \succ \cdot K_5$ .

**证明 必要性.** 由定理 13.5 即得.

**充分性.** 若有一个 5 色的平面图  $G$ , 由命题 13.13, 和命题 13.7, 可取  $G \in \mathcal{G}_0^*(K_5)$  为极大平面图且 4-连通. 然, 在  $G$  的一个面内加二节点使每个都与此面边界上三节点有边相连. 记所得的图为  $G'$ . 可见,  $G'$  为 5 色, 3-点可分而非少于 3-点可分, 无子图与  $H_4$  同形的非平面图. 但, 却有  $G' \in \mathcal{G}_0^*(K_5)$ . ■

#### § 14 色临界图<sup>[17-40]</sup>

本节讨论色数为  $k$  的各种意义下的极小图. 当然, 如能证明:  $k \geq 5$ , 这类图皆非平面的, 即得四色定理.

一个  $k$  色图  $G$ , 如果对任  $v \in V$ ,  $G-v$  不再为  $k$  色, 当然至多  $k-1$  色, 则称之为  $k$ -点临界图. 若对任何  $e \in E$ ,  $G-e$  不再  $k$  色, 则称  $k$ -边临界图. 若  $G$  的任何一个压缩, 除不足道者外, 皆非  $k$  色, 则称  $k$ -压缩临界图. 相仿地, 还有  $k$ -次压缩临界图. 所有这些统称为  $k$ -临界图. 或简称临界图.

**命题 14.1**

次压缩临界图  $\begin{cases} \nearrow \text{边临界图} \rightarrow \text{点临界图.} \\ \searrow \text{压缩临界图.} \end{cases}$

**证明** 若  $G$  为  $k$ -次压缩临界图. 因  $G$  的任一子图皆为其次压缩, 则也必称为  $k$ -边临界图. 又,  $G$  的任一压缩均为次压缩, 故亦为  $k$ -压缩临界图. 最后, 由  $\chi(G-v) \leq \chi(G-e)$ , 从而, 凡边临界图皆点临界图. ■

**命题 14.2** 任何非临界图  $G$  都有  $G_1 \subset G$  使得  $\chi(G_1) = \chi(G)$ , 且  $G_1$  为临界图.

**证明** 由命题 14.1, 只需考虑次压缩临界的情况. 由定义和图的有限性可得. ■

**命题 14.3** 任何临界图皆无单形分解.

**证明** 若  $G = G_1 \triangle G_2$ ,  $n \geq 0$ . 则  $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ . 然,  $G_1 - G_2 \cong \emptyset$ ,  $G_2 - G_1 \cong \emptyset$ . 则  $G$  非次压缩临界. 由命题 14.1 即得. ■

**命题 14.4** 任何  $k$ -点临界图皆  $(k-1)$ -边连通.

**证明** 若  $G = G[V_1] \cup G[\bar{V}_1] \cup G[(V_1, \bar{V}_1)]$ ,  $\bar{V}_1 = V - V_1$ ,  $(V_1, \bar{V}_1) = \{(u, v) | u \in V_1, v \in \bar{V}_1, (u, v) \in E\}$ ,  $|(V_1, \bar{V}_1)| \leq k-2$ . 则可给  $G[V_1]$ , 和  $G[\bar{V}_1]$  以  $(k-1)$ -着色. 设  $V_1$  中有  $s$  个节点与  $\bar{V}_1$  相邻共用  $r$  种不同颜色. 记  $f$  为  $G[V_1]$  上的色函数. 可设

$$1 = f(v_1) \leq f(v_2) \leq \dots \leq f(v_s) = r \leq k-2.$$

然后, 将  $(V_1, \bar{V}_1)$  中的边依这样的次序:  $e_1 = (v_1, u_1), \dots, e_i = (v_i, u_i), u_1, \dots, u_i \in \bar{V}_1$ . 则, 对于  $G[\bar{V}_1]$  的  $(k-1)$ -着色, 取

$$f(u) = \max\{x+1 | x = \max\{y | e_y \in (v_i, U)\}, 1 \leq i \leq s\},$$

$u \in U \subseteq \bar{V}_1$ ,  $U$  中节点着同色. 再将  $f$  延拓到全  $G[\bar{V}_1]$ , 无非通过色置换. 这就是  $G$  上的一

个  $(k-1)$ -着色. ■

对任  $V_0 \subseteq V$ ,  $H = G[V_0]$ , 将  $G$  看作在 3-维空间的嵌入,  $G-H$  的每一个连通部分称为  $G$  对  $H$  的桥. 若桥  $B$ ,  $[B] \supset V_0$ , 则称支撑桥, 或撑桥. 记  $B^{+H} = B+H$ , 称为扩充桥.

**命题 14.5** 一个  $k$ -压缩临界图  $G$ ,  $T$  为其极小分离节点集,  $T' \subset T$  为  $H = G[T]$  中的独立集. 则对任一扩充桥  $B^{+H}$  都存在  $(k-1)$ -着色使得  $T'$  中所有节点同色.

**证明** 由极小分离性,  $G$  对  $H$  至少有二个撑桥. 取  $B_1 \cong B$ . 将  $B_1$  中所有节点压缩为一个节点  $b$ . 然后, 将  $T'$  中的节点都逐一压缩到  $b$ . 得图  $G_1$ . 由临界性,  $G_1$  为  $(k-1)$ -可着色. 由此, 可得  $B^{+H}$  的  $(k-1)$ -着色使得  $T'$  中节点同色. ■

**命题 14.6** 任何  $k$ -压缩临界图均不可能有独立集作为分离节点集.

**证明** 由命题 14.5, 可以分离二部分的  $(k-1)$ -着色合并成原图的  $(k-1)$ -着色, 即得. ■

**命题 14.1** 任何  $k$ -压缩临界图皆至少 3-连通.

**证明** 由命题 14.3 和命题 14.6 直接可得. ■

**命题 14.7** 令  $G$  是  $k$ -压缩临界图,  $T$  为它的一个极小分离节点集. 则在  $G[T]$  中无极大独立集  $T' \subseteq T$  使得  $G[T-T']$  只有一种着色方式.

**证明** 不妨设  $G = B_1^{+H} \cup B_2^{+H}$ ,  $H = G[T]$ . 由命题 12.5 存在  $B_1^{+H}$ ,  $B_2^{+H}$  的  $(k-1)$ -着色使得  $T'$  上节点同色. 又由  $G[T-T']$  着色的唯一性可使逐节点同色. 从而, 由此即合成  $G$  的  $(k-1)$ -着色. ■

**定理 14.2** 任何  $k$ -压缩临界图皆 4-连通.

**证明** 若  $G$  为  $k$ -压缩临界图且存在  $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ ,  $G[T]$  分离  $G$ . 由命题 14.3 和命题 14.6 可知  $G[T]$  中有二个节点的独立集, 不妨设  $T' = \{t_2, t_3\}$ . 则  $G[T-T'] = \{t_1\}$ . 与命题 14.7 矛盾. ■

**命题 14.8** 设  $G$  为  $k$ -压缩临界图,  $T$  为  $G$  的极小分离集. 则对任  $t_0 \in T$ ,  $G[T-t_0]$  的所有压缩都至多  $k-3$  色.

**证明** 若  $H = \tau(G[T-t_0])$  为  $G[T-t_0]$  的一个压缩且  $\chi(H) \geq k-2$ . 由  $T$  的极小性,  $G$  对  $T$  的桥皆撑桥. 取二桥  $B_1, B_2$  并延拓  $\tau$  使  $\tau(V(B_i)) = t_i$ ,  $i=1, 2$ . 则  $\tau(G) = 2K_1 \circ H$ . 从而  $\chi(\tau(G)) = \chi(H) + 2 \geq k$ . ■

**定理 14.3** 任何  $k$ -压缩临界图,  $k \geq 5$ , 皆 5-连通.

**证明** 由定理 14.1—2, 只需讨论  $k$ -压缩临界图不存在 4 个节点的分离集  $T$ . 由命题 14.3,  $T \cong K_4$ . 由命题 14.7,  $T$  不能只有一边. 再由命题 14.8,  $T$  不能只有 5 条边. 从而, 只剩下只有 2, 3, 4 边三种. 均可表明其不可能. 即得定理. ■

这个定理的意义在于可导出下面有可能使四色问题开新生面的结果.

**定理 14.4** 任何平面图均 4-可着色的, 当且仅当任何 5-连通、5-压缩临界图  $G$  均有  $G \succ \cdot K_5$ .

**证明** 必要性. 由定理 13.6 即得.

充分性. 由命题 14.2, 定理 14.3, 任 5 色图  $G$  皆  $G \succ \cdot K_5$ . 再由定理 13.6, 即得. ■  
下面讨论  $k$ -边临界图.

**命题 14.9** 若  $k$  色图  $G$  中除  $v_0 \in V, \rho(v_0) \geq k-1$  外, 所有节点的次均为  $k-1$ , 则  $G$  为  $k$ -边临界图.

**证明** 设  $G_1 \subset G$ . 则存在  $v \in V$  使得  $\rho_1(v) \leq k-2$ . 由命题 14.4,  $G_1$  非  $k$ -点临界图. 又由命题 14.1,  $G_1$  亦非  $k$ -边临界图. 然, 再由命题 14.2, 只能  $G$  本身为  $k$ -边临界图. ■

由此观之, 对  $k$ -边临界图  $G$ , 那些次为  $k-1$  的节点是基本的. 称它们为界点. 所有界点的集合记为  $\Lambda$ . 称  $G[\Lambda]$  为界图. 关于界图的结构有如下精彩结果.

**定理 14.5** 任  $k$ -边临界图的界图的 2-连通片非完备图即奇长圈.

**证明** (轮廓): 首先证在界图上的任一偶长圈都至少有二条对角线. 然后再证任一图若其所有偶长圈皆至少有二条对角线则所有 2-连通片非完备图即奇长圈. ■

由此可见, 若一个  $k$ -边临界图所有节点全为界点, 则由命题 14.3 和此定理 非完备图即奇圈. 进而, 还可导出定理 7.2.

一个  $k$ -边临界图  $G$ , 若  $G = G_1 \cup G_2, H = G_1 \cap G_2$ , 和  $V(H) = \{u, v\}$ . 由命题 14.3 只能  $H = (\{u, v\}, \emptyset)$ . 且,  $G$  对  $H$  的桥只有  $B_1, B_2$  使得  $G_1 = B_1^+ H, G_2 = B_2^+ H$ . 若  $G_1$  的任  $(k-1)$ -着色均使  $u, v$  同色, 则  $G_2$  的任  $(k-1)$ -着色必总使  $u, v$  异色. 不妨就如此限定  $G_1, G_2$ . 这样, 由  $G_1, G_2$  出发还可构造二个  $k$ -边临界图. 记  $Q_1 = G_1 + (u, v), Q_2 = G_2 \cdot (u, v)$ , 即将  $u, v$  合而为一个节点. 如此由  $G$  变为  $Q_1, Q_2$  的过程称为离解. 反之, 称为结合.

**命题 14.10** 若  $G$  是由二  $k$ -边临界图  $Q_1, Q_2$  所结合, 且由  $Q_2$  中一节点分离出的二节点  $u, v$  有一个在  $G_2$  中次不超过  $k-2$ , 则  $G$  也是  $k$ -边临界图.

**证明** 由这时,  $G_1, G_2$  皆  $(k-1)$ -可着色. 且  $G_1$  中  $u, v$  异色,  $G_2$  中同色. 从而,  $G$  非  $(k-1)$ -可着色. 又, 若  $e_1 \in E_1$ , 则由  $Q_1 - e_1$  的任  $(k-1)$ -着色使  $u, v$  异色. 故, 可与  $G_2$  组成  $G - e_1$  的  $(k-1)$ -着色; 若  $e_2 \in E_2$ , 在  $Q_2$  中相应  $e'_2, Q_2 - e'_2$  为  $(k-1)$ -可着色且使  $u, v$  同色. 从而, 可与  $G_1$  组成  $G - e_2$  的  $(k-1)$ -着色. ■

二个图  $G_1, G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset, e_1 = (u_1, v_1) \in E_1, e_2 = (u_2, v_2) \in E_2$ . 称图  $G_0 = G_1 \overset{v_1, v_2}{\nabla} G_2 = ((V_1 - u_1) + (V_2 - v_1) + u, (E_1 - e_1) + (E_2 - e_2) + (v_1, v_2))$  为  $G_1$  和  $G_2$  的拼合. 其中,  $u = u_1 \cdot u_2$ , 即  $u_1, u_2$  合而为  $u$ .

**命题 14.11** 若  $G_0$  为  $G_1$  和  $G_2$  的拼合, 且记它们的色数分别为  $k_0, k_1$  和  $k_2$ , 并令  $k_1 \geq k_2$ . 则对  $k_1 \geq 3$ , 有

$$k_0 = \begin{cases} k_1 - 1, & \text{当 } k_1 > k_2, \text{ 且 } \chi(G_1 - e_1) = k_1 - 1; \\ k_1, & \text{否则.} \end{cases}$$

**证明** 当  $k_1 > k_2$  时, 因  $\chi(G_1) = k_1$ , 则  $\chi(G_1 - e_1) \geq k_1 - 1$ . 即  $\chi(G_1 - e_1) = k_1 - 1$ , 或  $k_1$ . 若前者,  $G_1 - e_1$  的  $(k_1 - 1)$ -着色必使  $u_1, v_1$  同色. 相仿地,  $\chi(G_2 - e_2) \leq k_2 < k_1$ . 则存在  $(k_1 - 1)$ -着色使  $u_2, v_2$  异色. 从而,  $v_1, v_2$  异色. 这就得到  $G_0$  的一个  $(k_1 - 1)$ -着色. 即  $k_0 \leq k_1 - 1$ . 又,  $G_1 - e_1 \subset G_0$  则  $k_1 - 1 \leq \chi(G_1 - e_1) \leq k_0$ , 故  $k_0 = k_1 - 1$ . 若后者, 有  $G_1 - e_1$  的  $k_1$ -着色使  $u_1, v_1$  异色. 又,  $k_1 > k_2$ , 可选  $G_2$  的一个  $k_1$ -着色使  $v_2$  与  $u_1, v_1$  不同色. 由此可组成  $G_0$  的一个  $k_1$ -着色. 另一方面,  $k_1 = \chi(G_1 - e_1) \leq k_0$ , 故只能  $k_0 = k_1$ . 至

于  $k_1 = k_2$  的情况, 亦如是讨论可得.

尤有: 若  $\chi(G_i) \geq k, i = 1, 2$ , 则亦  $\chi(G_0) \geq k$ .

设  $G_0$  有  $G_1, G_2$  的拼合, 取  $A_1, A_2 \subset V_0, A_1 \cap A_2 = \emptyset, (A_1, A_2) = \emptyset$ , 且  $|A_1| = |A_2| = \alpha$ . 令  $\mu: A_1 \rightarrow A_2$  为一一映象, 则  $G_0(A_1 \mu A_2) = \prod_{v \in A_1} G_0(v \cdot \mu(v))$ , 即将  $G_0$  中  $A_1$  的节点与  $A_2$  中相应的节点合而为一所得的图, 称为  $G_1$  与  $G_2$  的拼合.

**命题 14.12** 若  $\chi(G_i) \geq k, i = 1, 2$ , 则  $\chi(G_0(A_1 \mu A_2)) \geq k$ .

**证明** 由命题 14.11,  $G_0$  有性质. 又, 易证  $G_0(v \cdot \mu(v))$ ,  $v$  与  $\mu(v)$  不相邻, 也有此性质. 从而, 递推可得.

设  $G_1, G_2, \dots, G_r$  彼此无公共节点. 任一图  $G$ , 若  $G$  可由  $G_1, \dots, G_r$  经过一系列的拼合而得到, 则称  $G$  为  $G_i, i = 1, \dots, r$ , 的融合. 而且, 亦可证: 若  $\chi(G_i) \geq k, i = 1, \dots, r$ , 则它们的任一融合  $G$  也有  $\chi(G) \geq k$ . 进而, 若所有  $G_i = K_k, i = 1, \dots, r$ . 这时的融合称为  $k$ -融合. 自然, 对  $k$ -融合  $G$ , 也有  $\chi(G) \geq k$ .

**命题 14.13** 一个图  $G, \chi(G) \geq k$ , 当且仅当  $G$  有一个子图是一个  $k$ -融合.

**证明** 由命题 14.12, 只需证明必要性. 若  $G$  中任何子图皆非  $k$ -融合. 记  $G'$  为极大的支撑母图使无子图为  $k$ -融合. 在  $G'$  中存在  $v_0$  和  $v_1, v_2$  与  $v_0$  不相邻. 而这时,  $v_1, v_2$  亦不相邻. 因否则, 可由  $G' + (v_0, v_1)$  和  $G' + (v_0, v_2)$  中之极小  $k$ -融合  $Q_1, Q_2$  可得  $G'$  中的  $k$ -融合  $Q_1 \underset{v_1, v_2}{\nabla} Q_2$ . 从而, 在  $G'$  中二节点不相邻成一等价关系. 即有

$$V' = V'_1 + V'_2 + \dots + V'_s,$$

其中  $V'_i, i = 1, \dots, s$  皆  $G'$  中之独立集. 实际上,  $G' = K_{n_1, \dots, n_s}, n_i = |V'_i|, i = 1, \dots, s$ . 即完备  $s$ -分图. 由  $G'$  中无  $k$ -融合, 必  $s < k$ . 故  $\chi(G) \leq \chi(G') = s < k$ .

**定理 14.6** Hadwiger 猜想成立, 当且仅当任何  $k$ -融合都可压缩到  $K_k$ .

**证明** 直接由命题 14.13 可得.

**定理 14.7** 任何平面图 4-可着色, 当且仅当所有 5-融合皆非平面的.

**证明 必要性.** 由无平面 5 色图和 5-融合至少为 5 色. 故, 皆非平面的.

**充分性.** 由命题 14.13, 任何 5 色图皆含 5-融合. 从而, 无 5 色平面图.

## §15 色多项式<sup>[41-54]</sup>

色多项式的创始人是 G. D. Birkhoff. 目的在于研究: 对任一地图  $M$ , 用 4 色着其区域, 共有多少种方式. 这个数量记为  $P(M, 4)$ . 由对偶性, 或者对平面图  $G$ , 用 4 色着其节点. 这时, 用  $P(G, 4)$  表着色方式数. 二着色方式之谓不同指存在一个节点依此二方式具不同色. 当然, 也可不限定为平面图, 和不限定色数为 4 而取任正整数  $\lambda$ . 甚至, 为处理方便, 取  $\lambda$  为实数或复数. 这样,  $P(G, \lambda)$  就是实函数或复函数.

**命题 15.1** 对任一图  $G$ , 和正整数  $\lambda$ , 总有

$$P(G, \lambda) \begin{cases} = 0, & \text{当 } \lambda < \chi(G); \\ > 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (15.1)$$

**证明** 由  $P(G, \lambda)$  的定义自明.

**定理 15.1** 任一平面图  $G$  为 4-可着色, 当且仅当  $P(G, 4) > 0$ .

**证明** 由命题 15.1 即得. ■

下面的递推关系对于  $P(G, \lambda)$  有基本的重要性.

**命题 15.2** 对任一图  $G$ ,  $e = (u, v) \in E$ , 总有

$$P(G, \lambda) = P(G + e, \lambda) + P(G(v \cdot u), \lambda). \quad (15.2)$$

**证明** 只要注意  $P(G + e, \lambda)$ ,  $P(G(v \cdot u), \lambda)$  分别为  $G$  的  $\lambda$ -着色中使  $u, v$  异色与同色的方式数. 从而, 由  $P(G, \lambda)$  的定义即得. ■

这样, 任给一个图均可用 (15.2) 计算  $P(G, \lambda)$ . 而且基于此还可导出  $P(G, \lambda)$  为  $\lambda$  的多项式. 从而, 称之为图  $G$  的色多项式.

**定理 15.2** 对任一图  $G$ ,  $P(G, \lambda)$  皆  $\lambda$  的多项式. 且有形式

$$P(G, \lambda) = \lambda^v - \varepsilon \lambda^{v-1} + \sum_{i=1}^{v-2} (-1)^{v-i} a_i \lambda^i. \quad (15.3)$$

其中  $v, \varepsilon$  分别为  $G$  的节点数和边数.

**证明** 易知当  $G = \bar{K}_v$ , 即只有  $v$  个节点,  $P(G, \lambda) = \lambda^v$ . 命题成立. 再由命题 15.2, 可用数学归纳法得证. ■

由此可见, 对任非空图  $G$ ,  $P(G, \lambda)$  的常数项为 0;  $\lambda^v$  为最高次项;  $\lambda^{v-1}$  的系数为  $-\varepsilon$ ; 且, 所有系数皆整数并正负号相间. 若  $G$  不连通, 则  $\lambda^\omega | P(G, \lambda)$ . 即,  $P(G, \lambda)$  中有因子  $\lambda^\omega$ .  $\omega$  为  $G$  的连通片的数目.

**命题 15.3** 若  $K_m \subseteq G$ , 对  $K_m$  上任一  $\lambda$ -着色  $C_\lambda$ , 记  $N(G; K_m, C_\lambda)$  为所有  $G$  的使在  $K_m$  上与  $C_\lambda$  相合的  $\lambda$ -着色的数目. 则

$$P(G, \lambda) = P(K_m, \lambda) N(G; K_m, C_\lambda). \quad (15.4)$$

**证明** 由于  $K_m$  上的  $\lambda$ -着色  $C'_\lambda$  均可通过色置换从  $C_\lambda$  得到. 故,  $N(G; K_m, C'_\lambda) = N(G; K_m, C_\lambda)$ . 即得. ■

**命题 15.4** 若  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2 = K_m$  为单形分解, 则, 总有

$$P(G, \lambda) P(K_m, \lambda) = P(G_1, \lambda) P(G_2, \lambda). \quad (15.5)$$

**证明** 因  $G$  的  $\lambda$ -着色与  $G_1, G_2$  的使  $K_m$  上一致的  $\lambda$ -着色一一对应, 则  $P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda) N(G_2; K_m, C_\lambda)$ . 又,  $\lambda < m$ , (15.5) 自然成立. 否则,  $P(K_m, \lambda) > 0$ . 故, 由 (15.4),  $N(G_2; K_m, C_\lambda) = P(G_2, \lambda) / P(K_m, \lambda)$ . 亦得 (15.5). ■

为了解决四色问题, 直接估计色多项式在  $\lambda = 4$  处的值是非常困难的. 因此, 研究平面图的色多项式作为实函数, 甚至复函数在  $\lambda = 4$  附近的性态显得十分必要. 以便由连续性推出  $\lambda = 4$  的情况. 由 §10, 对于节点着色, 只需考虑极大平面图.

记  $P(G, \lambda) = \lambda^\omega Q(G, \lambda)$ . 关于  $Q(G, \lambda)$  有如下性质.

**引理 15.1** 若  $\lambda < 1$ , 则对任何图  $G$ , 总有

$$(-1)^{v+\omega} Q(G, \lambda) > 0. \quad (15.6)$$

**证明** 记  $R(G) = (-1)^{v+\omega} Q(G, \lambda)$ . 对任一边  $e = (u, v) \in E$ , 由命题 15.2 和 15.4, 可得

$$R(G) = \begin{cases} R(G - e) + R(G \cdot e), & \text{当 } e \text{ 在某圈上;} \\ (1 - \lambda) R(G \cdot e), & \text{否则.} \end{cases}$$

其中  $G \cdot e$  为  $G$  对  $e$  的边压缩. 从而, 由归纳法可证. ■

令  $\tau$  为方程  $x^2 = x + 1$  的正根. 即  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$ . 可见,  $\tau + 1 = \tau^2$ ,  $\tau + 2 = \sqrt{5}\tau$ . 其负根记为  $\tau^* = (1 - \sqrt{5})/2$ .

**定理 15.3** 对任何平面图  $G$ , 总有  $P(G, \tau + 1) \neq 0$ .

**证明** 若非真, 即  $P(G, \tau + 1) = 0$ . 由定理 15.2,  $P(G, \lambda)$  的系数皆整数. 故, 还有  $P(G, \tau^* + 1) = 0$ . 然,  $\tau^* + 1 < 1$ . 与理 15.5 矛盾. ■

实际上, 还可得下面的估界. 这里, 只引述而不证明.

**定理 15.4** 对任何极大平面图  $G$ , 总有

$$|P(G, \tau + 1)| < \tau^{5-v}. \quad (15.7)$$

由此观之, 当节点数  $v$  很大时,  $\tau^{5-v}$  接近 0. 从而,  $P(G, \lambda)$  在  $\lambda = \tau + 1$  附近有一根.

进而, 在极大平面图  $G$  上, 对于一边  $e$  连同与之关联的两三角形面可确定三个变换:  $\phi_e$ ,  $\psi_e$ , 和  $\theta_e$ . 如图 15.1 所示.

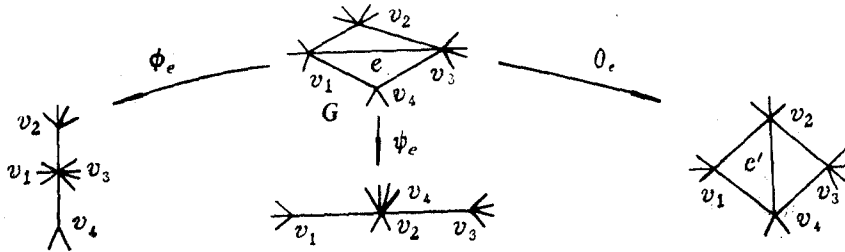


图 15.1 变换  $\phi_e$ ,  $\psi_e$ ,  $\theta_e$

**命题 15.5** 若  $G$  为极大平面图, 则  $\phi_e(G)$ ,  $\psi_e(G)$ , 和  $\theta_e(G)$  亦皆极大平面图.

**证明** 由  $\phi_e$ ,  $\psi_e$ , 和  $\theta_e$  的定义直接可得. ■

**引理 15.2** 令  $e$  为  $G$  中二三角面的公共边界, 如图 15.1, 则

$$P(G, \lambda) - P(\theta_e(G), \lambda) = P(\psi_e(G), \lambda) - P(\phi_e(G), \lambda). \quad (15.8)$$

**证明** 首先, 由命题 15.2, 可得

$$P(\phi_e(G), \lambda) = P(G \cdot e, \lambda); \quad P(\psi_e(G), \lambda) = P((\theta_e(G)) \cdot e', \lambda). \quad (15.9)$$

由 (15.2) 和 (15.9), 则有

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) + P(\phi_e(G), \lambda) &= P(G - e, \lambda) = P((\theta_e(G)) - e', \lambda) \\ &= P(\theta_e(G), \lambda) + P((\theta_e(G)) - e', \lambda) = P(\theta_e(G), \lambda) + P(\psi_e(G), \lambda). \end{aligned}$$

**引理 15.3** 令  $e$  为  $G$  中二三角形面的公共边界边, 如图 15.1, 则

$$P(G, \tau + 1) + P(\theta_e(G), \tau + 1) = \tau^3 (P(\psi_e(G), \tau + 1) + P(\phi_e(G), \tau + 1)). \quad (15.10)$$

**证明** 首先, 验证当  $G$  只有  $v_1, v_2, v_3, v_4$  四个节点时 (15.10) 成立. 一般情况, 有  $v \neq v_i, i = 1, \dots, 4$ . 当  $v$  为孤立节点, 记  $J = G - v$ , 有  $P(G, \tau + 1) + P(\theta_e(G), \tau + 1) - \tau^3 (P(\psi_e(G), \tau + 1) + P(\phi_e(G), \tau + 1)) = (\tau + 1) \{P(J, \tau + 1) + P(\theta_e(J), \tau + 1) - \tau^3 (P(\psi_e(J), \tau + 1) + P(\phi_e(J), \tau + 1))\} = 0$ , 其中用到归纳假设与命题 15.4; 当  $v$  非孤立节点, 取  $e_v \in E_v$ , 由命 15.2 和归纳假设, 有  $P(G, \tau + 1) + P(\theta_e(G), \tau + 1) - \tau^3 (P(\psi_e(G), \tau + 1) + P(\phi_e(G), \tau + 1)) = \{P(G - e_v, \tau + 1) + P(\theta_e(G) - e_v, \tau + 1) - \tau^3 (P(\psi_e(G) - e_v, \tau + 1) + P(\phi_e(G) - e_v, \tau + 1))\} - \{P(G \cdot e_v, \tau + 1) + P(\theta_e(G) \cdot e_v, \tau + 1) - \tau^3 (P(\psi_e(G) \cdot e_v, \tau + 1) + P(\phi_e(G) \cdot e_v, \tau + 1))\}$



$$= \{P(G - e_v, \tau + 1) + P(\theta_e(G - e_v), \tau + 1) - \tau^3(P(\psi_e(G - e_v), \tau + 1) + P(\phi_e(G - e_v), \tau + 1))\} \\ - \{P(G \cdot e_v, \tau + 1) + P(\theta_e(G \cdot e_v), \tau + 1) - \tau^3(P(\psi_e(G \cdot e_v), \tau + 1) + P(\phi_e(G \cdot e_v), \tau + 1))\} \\ = 0. \quad \blacksquare$$

**定理 15.5** 令  $e$  为  $G$  中二三角形面的公共边界边, 则总有

$$P(G, \tau + 1) = \tau^{-1}P(\psi_e(G), \tau + 1) + \tau^{-2}P(\phi_e(G), \tau + 1). \quad (15.11)$$

**证明** 将  $\tau + 1$  代入 (15.8) 并与 (15.10) 联立, 消去  $P(\theta_e(G), \tau + 1)$  即得.  $\blacksquare$

**引理 15.4** 令  $G$  为一个至多除一个面外皆三角形的平面图. 则

$$P(G, \tau + 2) = (\tau + 2)\tau^{3v-10}P^2(G, \tau + 1). \quad (15.12)$$

**证明** 若存在, 记  $f$  为这个例外的面并令其为无限面,  $B(f) = C$ . 如果  $V = V(C)$ , 则设  $C$  内有  $r$  个对角线, 有  $r + 1$  个三角形和  $v = r + 3$ . 反应用命题 15.4, 可得  $P(G, \lambda) = \{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\}^{r+1} / \{\lambda(\lambda - 1)\}^r = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^{r+1} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^{v-2}$ . 从而,  $P(G, \tau + 1) = \tau^3\tau^{-v+2} = \tau^{5-v}$ ;  $P(G, \tau + 2) = (\tau + 2)\tau^2\tau^{v-2} = (\tau + 2)\tau^v = (\tau + 2)\tau^{3v-10}P^2(G, \tau + 1)$ .  $\blacksquare$

如果有  $v \in V(C)$ , 则取次最小的. 记之为  $v_1$ . 当  $\rho(v_1) = 2$  时, 或存在二边成之圈分离  $G$  均可验证. 因此, 可以假设  $\rho(v_1) \geq 3$ . 选  $e \in E_{v_1}$ . 这时有形如图 15.1 给出的构形. 用引理 15.2 和归纳假设, 有

$$P(G, \tau + 2) - P(\theta_e(G), \tau + 2) = P(\psi_e(G), \tau + 2) - P(\phi_e(G), \tau + 2) \\ = (\tau + 2)\tau^{3v-13}\{P^2(\psi_e(G), \tau + 1) - P^2(\phi_e(G), \tau + 1)\} \\ = (\tau + 2)\tau^{3v-10}\{\tau^{-3}(P(\psi_e(G), \tau + 1) + P(\phi_e(G), \tau + 1)) \\ \times \{P(\psi_e(G), \tau + 1) - P(\phi_e(G), \tau + 1)\}\} \\ = (\tau + 2)\tau^{3v-10}(P^2(G, \tau + 1) - P^2(\theta_e(G), \tau + 1)). \quad (15.13)$$

其中最后一步是用引理 15.2—3.

又, 虽  $\theta_e(G)$  与  $G$  有相同数目的面, 而最小次却减 1. 由归纳假设, 有

$$P(\theta_e(G), \tau + 2) = (\tau + 2)\tau^{3v-10}P^2(\theta_e(G), \tau + 1).$$

故, 代入 (15.13) 即得.  $\blacksquare$

**定理 15.6** 对任极大平面图  $G$ , 总有  $P(G, \tau + 2) > 0$ .

至此, 可能猜想: 当  $\tau + 2 = 3.618 \dots \leq \lambda \leq 4$ ,  $P(G, \lambda) > 0$ . 可惜已经发现了反例.

对于平面图  $G$ ,  $P(G, \lambda)$  的根的分布似可由叙列

$$B(n) = 2 + 2\cos(2\pi/n), \quad n > 1 \quad (15.14)$$

来刻划. 当  $n = 2, 3, 4$ , 分别取值  $0, 1, 2$  确是  $P(G, \lambda)$  的可能根.  $B(5) = \tau + 1$ .  $B(6) = 3$ .  $B(7) = 3.415 \dots$  是廿面体的一实根.  $B(9) = 3.532 \dots$  与廿面体的  $3.52 \dots$  很接近  $B(10) = \tau + 2, \dots$ . 这个叙列收敛到 4. 如能依 (15.14) 确定平面图的色多项式的所有可能根即可得四色定理.

### 参 考 文 献

- [1] Heawood, P. J., On extended congruences connected with the four colour map theorem, *Proc. London Math. Soc.* 2<sup>nd</sup> Ser., Vol. 33(1932), pp. 253—266.
- [2] —, Failures in congruences connected with the four colour map theorem, *Proc. London Math. Soc.* 2<sup>nd</sup> Ser., Vol. 40(1936), pp. 189—202.

- [3] —, Note on a correction in a paper on map-congruences, *J. London Math. Soc.*, Vol. 18 (1943), pp. 160—167.
- [4] —, Note on a correction in a paper on map-congruences, *J. London Math. Soc.* Vol.19 (1944), pp. 18—22.
- [5] Tutte, W. T., On Hamiltonian circuits, *J. London Math. Soc.* 21(1946), pp. 98—101.
- [6] —, A theorem on planar graphs, *Trans. Amer. Math Soc.* 82(1956), pp. 99—116.
- [7] —, A non-Hamiltonian graph, *Canad. Math. Bull.* 3(1960), 1—5.
- [8] —, Bridges and Hamiltonian circuits in planar graphs, *Aequationes Math.*, Vol. 15(1977), pp. 1—33.
- [9] —, *Connectivity in Graphs*, University of Toronto press, 1966.
- [10] Whitney, H., A theorem on graphs, *Ann. Math.* 32(1931), pp. 378—390.
- [11] Grinberg, Ē. Ja, Plane homogeneous graphs of degree three without Hamiltonian circuits, *Latvian Math. Yearbook* 4(1968), pp. 51—58.
- [12] Halin, R., Bemerkungen über ebene Graphen, *Math. Annalen* 53(1964), pp. 38—46.
- [13] Hadwiger, H., Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe, *Vierteljahrsschr. naturf. Ges. Zürich* 88(1943), pp. 133—142.
- [14] —, Ungelöste Probleme, *Element. Math.* 13(1658), pp. 127—128.
- [15] Wagner, K., Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, *Math. Ann.* 114(1937), pp. 570—590.
- [16] —, Bemerkungen zu Hadwigers Vermutung, *Math. Ann.* 141(1960), pp. 433—451.
- [17] —, Beweis einer Abschwächung der Hadwiger—Vermutung, *Math. Ann.* 153(1964), pp. 139—141.
- [18] Dirac, G. A., A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs, *J. London Math. Soc.* 27(1952), pp. 85—92.
- [19] Halin, R., Über einen Satz von K. Wagner zum Vierfarbenproblem, *Math. Ann.* 153(1964), pp. 47—62.
- [20] Dirac, G. A., A theorem of R. L. Brooks an a conjecture of H. Hadwiger, *Proc. London Math. Soc.* 7 (3)(1957), pp. 161—195.
- [21] —, In abstracten Graphen vorhandene vollständige 4-graphen und ihre Unterteilungen, *Math. Nachr.* 22(1960), pp. 61—85.
- [22] —, 4-chrome Graphen und vollständige 4-graphen, *Math. Nachr.* 22(1960), pp. 51—60.
- [23] —, Connectedness and structure in graphs, *Rend. Palermo* 9(2)(1960), pp. 114—124.
- [24] —, Some results concerning the structure of graphs, *Canad. Math. Bull.* 6(1963), pp.183—210.
- [25] —, Homomorphism theorems for graphs, *Math. Ann.* 153(1964), pp. 69—80.
- [26] Ore, O., *The Four-Color Problem*, Acad. Press, 1967, pp. 134—162.
- [27] Dirac, G. A., Note on the colouring of graphs, *Math. Zeitschr.* 54(1951), pp.347—353.
- [28] —, Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.* 2(3)(1952), pp. 69—81.
- [29] —, A property of 4—chromatic graphs and some remarks on critical graphs, *J. London Math. Soc.* 27(1952), pp. 85—92.
- [30] —, Map-color theorems, *Canad. J. Math.* 4(1952), pp. 480—490.

- [31] —, The structure of  $k$ -chromatic graphs, *Fund. Math.* 40(1953), pp. 42—55.
- [32] —, Theorems related to the four colour conjecture, *J. London Math. Soc.* 29(1954), pp. 143—149.
- [33] —, Circuits in critical graphs, *Monatsh. Math.* 59(1955), pp. 178—187.
- [34] —, Map colour theorems related to the Heawood colour formula, *J. London Math. Soc.* 31(1956), pp. 460—471.
- [35] —, A contraction theorem for abstract graphs, *Math. Ann.* 144(1961), pp. 93—96.
- [36] —, On the structure of 5—and 6—chromatic abstract graphs, *J. für. Math.* 214(1964), pp. 43—52.
- [37] —, Trennende Knotenpunktmengeten und Reduzibilität abstrakter Graphen mit Anwendung auf das Vierfarbenproblem, *J. für Math.* 204(1960), pp. 116—131.
- [38] Gallai, T., Kritische Graphen, I and II, *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci. A.* 8(1963), pp. 165—192; 9(1964), pp. 373—395.
- [39] Hajós, G., Über eine Konstruktion nicht  $n$ -färbbarer Graphen, *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg A10* (1961), pp. 116—117.
- [40] Zeidl, B., Über 4—und 5—chrome Graphen, *J. London Math. Soc.* 27(1952), pp. 85—92.
- [41] Birkhoff, G. D. & Lewis, D. C., Chromatic Polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* 60(1946), pp. 355—451.
- [42] Berman, G., and Tutte, W. T., The golden root of a chromatic polynomials, *J. Comb. Theory* 6(1969), pp. 301—302.
- [43] Tutte, W. T., Chromials, *Studies in Graph Theory, Part I* (Ed. by D. R. Fulkerson)(1975), pp. 361—377.
- [44] —, On chromatic polynomials and the golden ratio, *J. Comb. Theory* 9(1970), pp. 289—296.
- [45] —, More about chromatic polynomials and the golden ratio, *Combinatorial Structures and Their Applications*, Gordon & Breach (1970), pp. 439—453.
- [46] —, The golden ratio in the theory of chromatic polynomials, *Annals of the N. Y. Academy of Sciences* 175(1970), pp. 391—402.
- [47] Hall, D. W., Siry, J. W., and Vanderslice, B. R., The chromatic polynomial of the truncated icosahedron, *Proc. Amer. Math. Soc.* 16(1965), pp. 620—628.
- [48] Read, R. C., An introduction to chromatic polynomials, *J. Comb. Theory* 4(1968), pp. 52—71.
- [49] Whitney, H., A logical expansion in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.* 38(1932), pp. 572—579.
- [50] —, The coloring of graphs, *Ann. Math.* 33(1932), pp. 688—718.
- [51] Bari, R., Absolute reducibility of Maps of at most 19 regions, Thesis, John Hopkins University, 1966.
- [52] —, The leading coefficients of the chromatic polynomials  $Q_n(u)$  and  $R_n(x)$  and the Birkhoff-Lewis Conjecture, *Recent Progress in Combinatorics* (Ed. by Tutte, W. T.), Acad. Press, 1969.
- [53] —, Coefficients of  $u^{n-5}$  and  $u^{n-6}$  in the  $Q$ -chromatic  $Q_n(u)$ , *Anr. of N. Y. Acad. Sci.* 175(1970), pp. 25—31.

- [54] —, Chromatic equivalence of graphs, *Graphs and Combinatorics*, Springer, 1974.
- [55] 刘彦佩, 平面图的理论及四色问题(Ⅰ), ——五色定理与四色问题的形式, *数学研究与评论*, 第4卷(1984)第一期.

## Planar Graph Theory and the Four Color Problem(Ⅲ)

### —Some Theoretical Results Derived from the Four Color Problem

*Liu Yanpei*

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)

#### **Abstract**

This is the third part of the series of five papers about planar graph theory and the four color problem.

It contains the following five sections: §11 Heawood equations; §12 Hamiltonian planar graphs; §13 Hadwiger conjecture; §14 Chromatic critical graphs; §15 Chromatic polynomials.