第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

复样条函数简介*

路见可 陈翰麟

（武汉大学）（中国科学院数学研究所）

复变量的样条函数最早于1967年为 J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh[2] 所研究。十多年来这方面的工作并不太多，还没有引起国际数学界的足够重视，和实样条的丰富研究成果相比较，显得相差甚远。究其原因，可能是由于其应用不象实样条那样广泛，而前者比起后者来说又复杂得多。实样条只在实域中考虑问题，结点（knot）只限于实数，而复样条要在复域中考虑问题，因而结点分布的任意性很大。假如考虑某曲线上复样条的逼近问题，那么还与曲线本身的形状有关，情况更为复杂。此外，在复域中，熟知的最小能量原理不再存在，因而实样条中许多方法不能直接移植到复样条中来，从而更增加了研究的困难。

另一方面，复样条函数通过 Cauchy 型积分可以和解析函数联系起来，通过 Poisson 积分又可以和任何复的连续函数联系起来，于是可以用解析条样去逼近解析函数，又可以用调和样条逼近种种复函数（包括解析的、拟解析的以及复调和函数等）。所以从内容上看又极为丰富。从形式上看，无论解析样条或调和样条都可以用初等函数表示出来，所以又极为简单且便于计算。

用插值多项式去逼近解析函数，当然是十分简单的。但是 Fejér 的例子（见 über Interpolation, Götingen Nachr., 1916, 66-91）说明，甚至在圆上均匀分布的插值点情况下，这种多项式序列也可能在某些边界点上发散。但是，用解析样条或调和样条去逼近完全可以克服这个缺陷。因而无论从理论上或应用上，复样条函数是一种强有力的工具，值得注意。

本文的目的是简略地介绍复样条函数目前的研究概况，以引起大家的兴趣，希望有更多的数学工作者来关心并参加这方面的工作。

（一）基本概念，插值与误差估计

设在复平面上给定一曲线 Γ，其上按一定顺序依次给出一组点 $\Delta=\{z_0,z_1,\cdots,z_M\}$，其中 z_0,z_M 分别为 Γ 的两端点。如 Γ 是封闭曲线，则认为 $z_M=z_0$，且各 $\{z_j\}$ 依反时针方向排列。

* 本文曾在1982年全国样条函数学术讨论会上报告过。

1983年7月13日收到。

记 $\Gamma_j=\widehat{z_j z_{j+1}}$，$q_\Delta(z)$ 是定义在 Γ 上的一复函数，在每一 Γ_j 上，$q_\Delta(z)\in\pi_n$（π_n 是次数不超过 n 的多项式族），在整个 Γ 上 $q_\Delta(z)\in C^{n-r}$，$r\geqslant 1$，则称 $q_\Delta(z)$ 为 Γ 上的 n 次（或 $n+1$ 阶）的多项式样条函数，或简称 n 次复样条，Δ 中诸点称为样条的结点，r 称为其亏数. 如无特别声明，我们恒设 $r=1$，且 Γ 是封闭曲线. 记这类函数的全体为 $\mathscr{S}_n(\Delta,\Gamma)$ 或 $\mathscr{S}_n(\Delta)$. 我们还总假定 $M>n$.

最早考虑的插值问题（见[2]）是在结点处的插值. 即已给一组复数 $f_j(j=0,\cdots,M-1)$，要找出一个 $q_\Delta(z)\in\mathscr{S}_n(\Delta)$，使 $q_\Delta(z_j)=f_j(j=0,\cdots,M-1)$.

令 $h_j=z_{j+1}-z_j$，在[2]中首先研究了三次插值样条，得到以下结果：当

$$2|h_j+h_{j+1}|>|h_j|+|h_{j+1}|,\quad j=0,\cdots,M-1 \tag{1.1}$$

时，三次插值样条存在且唯一.

令 $\|\Delta\|=\max\limits_j|h_j|$，则当 $\|\Delta\|/\min\limits_j|h_j|\leqslant K$（$K$ 为有限常数）时，[2]中有如下的结果：若 $f(z)\in C^r(r=0,1,2,3)$，则 $q_\Delta^{(p)}(z)(p=0,\cdots,r)$ 一致收敛于 $f^{(p)}(z)$，且

$$|f^{(p)}(z)-q_\Delta^{(p)}(z)|=o(\|\Delta\|^{r-p})\qquad(\|\Delta\|\to 0\text{ 时}). \tag{1.2}$$

若 $f^{(r)}\in H^\alpha(0\leqslant\alpha<1$，$\alpha$ 阶 Hölder 条件)，则当上述步长比均匀有界时，

$$|f^{(p)}(z)-q_\Delta^{(p)}(z)|=O(\|\Delta\|^{r+\alpha-p}). \tag{1.3}$$

上面关于三次插值样条的存在和唯一是在条件(1.1)成立时得到的. 我们自然要问：条件(1.1)是否可以减弱或去掉？对于一般的曲线 Γ 来说，完全去掉是不行的，因为求解插值问题时总会遇到要求解一代数方程组，其系数矩阵是 h_j 的函数，它不可能对任意 h_j 都满秩. 那么，对怎样的曲线 Γ 可以去掉条件(1.1)？这些问题都没有解决. 但在 $\Gamma=\partial U$ 是单位圆 U 的边界圆周的情况下，陈翰麟在[8]中得到：当 $n=2$ 时，对于任意的 Δ，插值样条唯一存在当且仅当 M 是奇数时（对一般的 Γ，还可参看[17]）；当 $n=3$，则无论 $M(\geqslant 4)$ 为奇数或偶数，插值样条总唯一存在.

M.Golomb[14]曾用保角映射的方法把 ∂U 上的问题化为实轴上的问题，再根据实域中的最小模原理来研究复插值样条的问题.

对于单位圆周 ∂U 上等距结点的插值问题则有一系列的结果. 这是由于，在等距结点情况下，系数矩阵是一个循环阵，因此可利用这一特点来判断它是否满秩.

1971 年，J. H. Alberg 等人[4]得到如下的结果：在 ∂U 上均匀分布结点的情况下，如 n 为奇数，则插值样条唯一存在，如 n 为偶数而 M 为奇数时，插值样条也唯一存在，并给出了通过基样条作出插值样条的方法. 当 n 为奇数时，在[1]中对 $f(t)$ 和其插值样条 $q_\Delta(z)$ 间的误差有如下的估计：如果 $f(z)\in C^{m+1}(0\leqslant m\leqslant n)$，则有

$$|f^{(m-\beta)}(z)-q_\Delta{}^{(m-\beta)}(z)|=O(\|f^{(m+1)}\|_\infty\|\Delta\|^{\beta+1}),\quad \beta=0,\cdots,m. \tag{1.4}$$

1972 年，I. J. Schoenberg[22]把上述存在唯一性问题推进，得出如下结论：在 ∂U 上令 $\omega=e^{2\pi i/M}$，以 $\omega^j(j=0,\cdots,M-1)$ 为结点，则除去 M，n 都是偶数外，n 次插值样条总唯一存在，其插值点改为弧 $\widehat{\omega^j\omega^{j+1}}$ 的中点时，那么除去 M，n 都是奇数外，n 次插值样条也唯一存在. 证明的方法是利用系数矩阵的循环特点，给合有限 Fourier 分析方法解决的.

1979 年，J. Tzimbalario[24]研究了基数样条(Cardinal spline)的复插值样条问题，

得到了较一般的结果，现简述其结果如下。记 Π_n 为

$$\sum_{j=0}^{n} C_j e^{i(j+l)\eta x} \qquad x \in \boldsymbol{R}$$

函数的集合，其中 C_j 为任意复数，$l, \eta>0$ 为固定的实数。所谓 n 次复基数样条 $S(x)$ 为：

$$S(x) \in C^{n-1}(\boldsymbol{R}),\ S(x)|_{\nu h<x<(\nu+1)h} \in \Pi_n, \qquad \nu=0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

考虑下列插值问题：已给一组复数 $\{y_\nu\}_{-\infty}^{+\infty}$，要找出 n 次复基数样条 $S(x)$，使

$$S((\nu+\alpha)h)=y_\nu,\ \nu=0,\ \pm 1, \cdots,$$

其中 $0 \leqslant \alpha<1$，这是以 νh 为结点，$(\nu+\alpha)h$ 为节点（node）的插值问题.如果 $\eta h \leqslant \frac{2\pi}{n+1}$，则上述插值问题有唯一解的充要条件是：当 n 为奇数时 $\alpha \neq \frac{1}{2}$；当 n 为偶数时 $\alpha \neq 0$。

当 $l=0$，$\eta=1$，且令 $z=e^{ix}$，则 Π_n 中的函数就是 z 的 n 次多项式。如再取 $h=2\pi/M$，$\{y_\nu\}$ 取成以 N 为周期的数列，则上述问题就是 ∂U 上均匀分布结点的一般插值问题。Schoenberg 的前述结果是这问题的特例。

1979 年，K. K. Mather 与 A. Sharma[19] 考虑 ∂U 上的离散多项式样条，实际上是一种高亏数的样条，即对样条函数 $S_n(z)$ 在 ∂U 上的光滑度降低，只要求 $S_n(z) \in C$，于每一弧段 $\Gamma_j=\widehat{\omega_j\omega_{j+1}}$ 上它是 n 次多项式。设当 $z \in \Gamma_j$ 时 $S_n(z)=P_j(z)$，要求

$$P_j(\omega^j \alpha^l)=P_{j-1}(\omega^j \alpha^l),$$

$$j=0,\ 1, \cdots, M-1;\ l=0,\ \pm 1, \cdots, \pm\left[\frac{n}{2}\right],$$

这里 $\omega=e^{2\pi i/M}$，$\alpha=e^{i\beta}$。令 $\psi=e^{i\gamma}(\gamma \neq 0)$，$\varepsilon=0$ 或 1。他们提的问题是：如何选择 n，M γ 及 β 使对任数组 $\{f_j\}_0^{M-1}$，插值问题

$$S_n(\psi^\varepsilon \omega^j)=f_j,\ j=0,\ 1, \cdots, M-1,$$

在上述函数类中有唯一解。其结果是：如果 $0<\beta<2\pi/Mn$ 且 $0 \leqslant M\gamma \leqslant\left[\frac{N}{2}\right]\beta$ 或 $\pi \leqslant M\gamma \leqslant 2\pi$，则除去下列两种例外情况，上述问题有唯一解：

1）$\varepsilon=0$，n，M 均为偶数，$\beta=0$；

2）$\varepsilon=1$，n，M 均为奇数，$\gamma=\pi/M$。

1981 年，C. A. Micchelli 与 A. Sharma[20]研究了 ∂U 上均匀分布的插值问题，但在每一段弧 Γ_j 上，函数是

$$S_n(z)=\sum_0^n c_{j\nu} z^{\lambda_\nu},\ z \in \Gamma_j,$$

其中 $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(<M)$ 是给定的一组非负整数，$c_{j\nu}$ 是复常数。对 $S_n(z)$ 的光滑度要求比 Mather 等提出的提高很多，要求 $S_n(z) \in C^{n-1}$，插值问题为：任给一组 $\{w_j\}_0^{M-1}$，要求

$$S_n(\psi\omega^l)=w_l,\ l=0, \cdots, M-1,$$

其中 $\psi=e^{i\gamma}$ 如前。他们证明了，当 $\lambda_j+\lambda_{n-j}$ $(j=0, \cdots, n)$ 与 j 无关时，除了 $\lambda_0+\lambda_n+M$ 为偶数以及下列两种情形外，插值问题有唯一解：

1）n 是偶数，且 $\gamma=0$；

2）n 是奇数，且 $\gamma=\frac{1}{2}$.

当 $\lambda_j=j$ 时这就是 Schoenberg 的结果.

对于一般封闭或开口曲线 Γ 的复样条插值问题目前工作还很少. 前已提到，对于任意分布的结点由于系数矩阵无循环特点，满秩的条件也难以给出. 但是，如果对插值样条的光滑度要求降低，则对于某些插值问题是可以获得解决的. 路见可[16]提出亏数为 2 的复三次插值样条问题：对 Γ 已给出的函数 $f(z)\in C^1$，要求 $S_3(z)$ 使在结点 z_j 处满足

$$S_3(z_j)=f(z_j),\quad S_3'(z_j)=f'(z_j),\quad j=0,\cdots,M,$$

这里 Γ 可以是封闭的也可以是开口的(分段）光滑曲线，结点 z_j 可以在 Γ 上任意分布. 这种插值样条显然存在且唯一. 在 $f(z)\in C^r(r=1,2,3)$ 时，作出了 $|f^{(p)}(z)-S_3^{(p)}(z)|$ $(0\leqslant p\leqslant r)$ 的估计，其误差阶和通常的一样，如（1.2)，这种样条由于便于作出，且避开了曲线 Γ 的复杂性，故应用起来非常方便，且误差的估计值可用 $f^{(p)}$ 的连续模 $\omega_p(\delta)$ 以及

$$C_\delta=\max_{|\widehat{zz'}|\leqslant\delta}|\widehat{zz'}|/|z-z'|,\quad \delta=\max_j|\widehat{z_{j-1}-z_j}|$$

表出. 如果 $f(z)\in C$，则引进一种修正的三次插值样条，从而得出类似结果. 最近又把这种思想推广到高亏数的四次样条[18].

陈翰麟[12]研究了这样的插值样条问题：设 q 为一复常数，插值点为 $q^\nu(-\infty\leqslant k_1\leqslant\nu\leqslant k_2\leqslant+\infty)$. 这种问题既包括了实轴上的插值问题(当 q 为正实数)，也包括了单位圆周 ∂U 上的插值问题（当 $|q|=1$)，它还包括了其他一些特殊曲线上的插值问题，例如，$q=e^{\alpha+i}$（α 为实数)，则它就是对数螺线上的问题. 对于 $\Gamma=q^x(-\infty<x<+\infty)$ 上的无限插值问题，也作了讨论. 在这些方面得到了一些结果（当 $n\leqslant4$).

对任意曲线 Γ，K. Atkinson[6]考虑了一次和二次复插值样条. 此外，A. Chatteree 和 H. P. Dikshit[7]考虑过亏数为 2 的三次插值样条（但该文有错误).

结点分布的复杂性，对插值样条的存在唯一的一般性研究带来了很大困难. 但是，能否对插值的概念稍加更改，使对任意分布的结点所产生的 n 次复样条函数能较好地逼近原来的函数，甚至在各阶导数间也有较好的逼近度呢? 借助于 de Boor 等人在实样条研究中的思想，陈翰麟在[9]中对于 ∂U 上任意分布的结点，引进了 n 次拟插值样条函数概念，就有上述性质，并作出了误差估计. 设 $\{z_j\}_1^M$ 为 ∂U 上任意分布的结点. 令 $\lambda_j=\prod_{k=j+1}^{j+n}(z_k-z)$. $T_{j,r}=\frac{(-1)^{n-r}}{n!}\lambda_j^{(n-r)}(t_j)$，$t_j\in\widehat{z_jz_{j+n+1}}$(劣弧)，$r=0,\cdots,n$；$j=1,\cdots,M$，又令 $L_jg=\sum_{r\leqslant n}T_{j,r}g^{(r)}(t_j)$. 所谓 $g(z)$ 的 n 次拟插值样条是

$$\mathscr{L}(g)=\sum_{j=1}^{M}(L_jg)N_{j,n+1}(z),\quad g\in C^{n-1}(\partial U),$$

其中 $N_{j,n+1}(z)$ 是 n 次复 B 样条. 这时有如下的误差估计：设 $g^{(n)}$ 在 ∂U 上的绝对连续，则

$$|\mathscr{L}^{(s)}(g)-g^{(s)}|\leqslant K_s\omega(g^{(n)};\ \delta)\delta^{n-s},\quad \delta=\max|z_{j+1}-z_j|,$$
$$0\leqslant s\leqslant n, \tag{1.5}$$

且当 $s\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$时，$K_s$ 不依赖于步长比. 当 n 固定时，由（1.5）知 $\mathscr{L}(g)$ 以及它的各阶

导数在 ∂U 上均匀收敛于 g 及其同阶导数.

（二）解析样条与复调和样条函数

为了在区域上能构造一种函数，使它能近似地表示原来的函数，需要某种已知的信息.这种信息在多数情况下是函数的值或其导数的值.我们从已给函数在区域边界上的值说起.

前面已介绍，区域 D 的边界 Γ 如果是 Jordan 曲线，在其上给定一组点 $z_1,\cdots,z_M$ 作为结点，在这些点（或别的点）给出函数值 $f_1,\cdots,f_M$，则在某些条件下可以作出插值样条函数 $q(\zeta)$，$\zeta\in\Gamma$. 以 $q(\zeta)$ 为边界值，作 Cauchy 型积分，就可能是原函数的一种逼近.

事实上，Ahlberg 等人在[1，3]中就是这样做的，他们定义

$$S_\Delta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{q_\Delta(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\bar{\in}\Gamma, \tag{2.1}$$

其中 $q_\Delta(\zeta)$ 是以 $\{z_j\}_1^M$ 为结点的 n 次复样条. 如果当 $\zeta\in\Gamma_j(=\widehat{z_jz_{j+1}})$ 时 $q_\Delta(\zeta)=P_j(\zeta)$，则 $S_\Delta(z)$ 还可表为

$$S_\Delta(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^M P_j(z)\ln\frac{z-z_{j+1}}{z-z_j} \tag{2.2}$$

$(z_{M+1}=z_1)$，其中 $\ln\frac{z-z_{j+1}}{z-z_j}$（对固定的 j）是全平面沿 Γ_j 剖开后取的一连续分支.

分别记 D^+ 及 D^- 为 Γ 所围的内域及外域. 如果 $f(z)$ 在 D^+ 内解析、在 $\bar{D}^+$ 上连续，且 $q_\Delta(\zeta)$ 能在 Γ 上均匀收敛于 $f(\zeta)$，则易看出由(2.1)所定义的 $S_\Delta(z)$ 当 $\|\Delta\|\to0$ 时也内闭均匀收敛于 $f(z)$. 在[1]中给出：当 $\Gamma=\partial U$ 时，若 f 在 D^+ 内解析，且 $f\in C^{m+1}(\bar{D}^+)$，则当 $|z|\leqslant r<1$ 时，

$$|f^{(\beta)}(z)-S_\Delta^{(\beta)}(z)|=O(\|f^{(m+1)}\|_\infty\|\Delta\|^{m+1-\beta}),\quad \beta=0,\cdots,m.$$

当 $z\to\zeta_0\in\Gamma$ 时，其极限值是

$$S_\Delta^\pm(\zeta_0)=\pm\frac{1}{2}q_\Delta(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{q_\Delta(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}. \tag{2.3}$$

但即使 $f(z)$ 在 D^+ 内解析、在 $\bar{D}^+$ 上连续甚至 $\in H^\mu(0<\mu\leqslant1)$，从 $q_\Delta(\zeta)$ 在 Γ 上均匀收敛于 $f(\zeta)$ 也不能导致 $\int_\Gamma\frac{q_\Delta(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$ 均匀收敛于 $\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$；所以，由(2.3)知，不能得出 $S_\Delta(z)$ 在 $\bar{D}^+$ 上均匀收敛于 $f(z)$ 的结论.

Z. Wronicz[25]对 Γ 作了一定限制后，证明了三次解析插值样条在上述假定下在 $\bar{D}^+$ 上均匀收敛于 $f(z)$，并作了误差估计.

K. Atkinson[6]对线性解析样条以及类似于 Simpson 的二次插值解析样条也作出了类似结果.

路见可在[17]中用亏数为 2 的修正三次插值样条 $q_\Delta^*(\zeta)$ 证明了：只要 $f(t)\in H^\mu$，$t\in\Gamma$，Γ 可以是开口的或封闭的分段光滑曲线，则

$$|f(\zeta)-q_\Delta^*(\zeta)|=O(\|\Delta\|^{\mu-\varepsilon}),\quad \zeta\in\Gamma,$$

$\varepsilon>0$ 可任意小. 如果 Γ 是封闭的，$f(\zeta)$ 还是 $\bar{D}^+$ 内解析函数的边值，则显然有

$$|f(z)-S_\Delta^*(z)|=O(\|\Delta\|^{\mu-\varepsilon}),\quad z\in\bar{D}^+,$$

$S_{\Delta}^{*}(z)$ 即(2.1)中以 $q_{\Delta}^{*}(\zeta)$ 代替 $q_{\Delta}(\zeta)$ 所得的函数。[17，18]中还对 $n\leqslant 4$ 的各种亏数>1的插值样条在 $f(\zeta)$ 的各种光滑阶的条件下，作出了一系列的误差估计.

Z. Wronicz 在[25—27]中利用 Schwarz 公式来定义区域上的解析样条：

$$S_{\Delta}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}q_{\Delta}(\theta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\theta+iA,\quad \zeta=e^{i\theta},\quad |z|<1, \tag{2.4}$$

其中 A 为实常数，而 $q_{\Delta}(\theta)$ 是在分划

$$-\pi=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_N=+\pi$$

上关于实变量 θ 的 n 次多项式插值样条，被插值函数 $f(z)$ 在 U 内解析，在 $\bar{U}$ 上连续. 然后他估计了 $f(z)$ 与线性解析样条（即 $q_{\Delta}(\theta)$ 是 θ 的线性插值样条）$S_{\Delta}(z)$ 的误差. 在[26]中，$q_{\Delta}(\theta)$ 是对于 $u(\theta)=\mathrm{Re}f(\theta)$ 插值的实样条（奇数次的 θ 的实多项式样条），这时他考虑的是一种在 $[-\pi,\ +\pi]$ 上的特殊分划 $\{\theta_i\}$ 作为结点. 假定 $u(\theta)$ 的连续模 $\omega(\delta)$ 满足 Dini 条件：$\omega(\delta)\log\delta\to 0$，则由上面作出的 $q_{\Delta}(\theta)$ 作为边界函数所定义的 $S_{\Delta}(z)$（见(2.4)）在 $\bar{U}$ 上均匀收敛于 $f(z)$. 他还利用（2.4）对 A_k 类的函数空间（即在 U 中解析、在 $\bar{U}$ 上有连续的 k 阶导数的函数族）找到了一组基底，并导出一些结果.

D. M. Hough 与 N. Paparnichael[15] 通过复样条函数作出了从一个 Jordan 区域 Ω 到单位圆 U 的共形映照的近似方法.

上面由（2.1）或（2.4）作出的函数，虽然都是从插值样条 $q_{\Delta}(\zeta)$ 或 $q_{\Delta}(\theta)$ 出发的，但当 z 从区域内部趋于边界点 ζ_0 时，$S_{\Delta}(z)$ 并不趋于 $q_{\Delta}(\zeta_0)$ 或 $q_{\Delta}(\theta_0)$，因而并不趋于 $f(z)$ 在插值点的函数值，即下式不成立：

$$\lim_{z\to\zeta_0}S_{\Delta}(z)=f(\zeta_0),\quad \zeta_0\in\Delta, \tag{2.5}$$

而是趋于一个由（2.3）或（2.4）所定义的积分. 为了希望边界值函数就是插值多项式样条，陈翰麟在[10]中用下列 Poisson 积分来定义调和样条：

$$P_{\Delta}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}q_{\Delta}(\zeta)\,\mathrm{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\theta,\quad \zeta=e^{i\theta}, \tag{2.6}$$

其中 $q_{\Delta}(\zeta)$ 是 ∂U 上的 n 次多项式样条. 显然

$$\lim_{z\to\zeta_0}P_{\Delta}(z)=q_{\Delta}(z_0),\quad |\zeta_0|=1.$$

而且，由于复调和函数具有最大模原理. 因此，如果 $q_{\Delta}(\zeta)$ 在 ∂U 上是复调和函数 $f(\zeta)$ 很好的逼近，立即可知 $S_{\Delta}(z)$ 在 U 上也是 $f(z)$ 的一个很好的逼近，且误差界不变. 因此在 ∂U 中对 $f(\zeta)$ 作出种种插值或拟插值样条，它们和 $f(\zeta)$ 之间在 ∂U 上的误差估计立即可以移值到整个 $\bar{U}$ 上. 于是，在 $\bar{U}$ 上，$S_{\Delta}(z)$ 及其各阶导数均匀收敛于 $f(z)$ 及其相应导数，并可作出误差估计.

如果被逼近函数 $f(z)$ 是 U 到一区域 G 的共形映照，则当 $\|\Delta\|$ 充分小时 $P_{\Delta}(z)$ 是一对一的保持区域的映照，可以证明它是 ε-拟共形映照，且当 $\|\Delta\|\to 0$ 时，其映象区域 G_{Δ} 按 Carathèodory 的意义收敛于 G. 陈翰麟和 T. Hvaring 在[13]中通过解一积分方程组，得出从 U 到 Jordan 区域共形映照的函数的边界近似值，然后由边界值（离散数据）作出复调和样条，并给出许多具体例子.

[13]中还进一步减轻了对被逼近复调和函数在边界上的要求，利用复三次插值样条

（结点在 U 上任意分布）作出复调和样条，并给出更好的误差估计。

其他方式的解析插值样条（见[1]，[5]）如下。取定一点 $z_0\in D^+$，已给一组数 $\{A_k\}_{k=0}^{M-1}$，求一 n 次解析样条（2.1），其中 $q_\Delta(\zeta)$ 是 $\Gamma=\partial D^+$ 上的 n 次多项式复样条，使得

$$S_\Delta^{(k)}(z_0)=A_k\ \ (k=0,\cdots,M-1),\ \ M\geqslant n. \tag{2.7}$$

Ahlberg 等人证明了这种函数唯一存在。如果 $z_0\in D^-$，则只要给定 $A_{n+1},\cdots,A_{M-1}$ 就可唯一确定 $S_\Delta(z)$，$z\in D^-$。

给定 $z_1,\cdots,z_M\in D^+$ 及数组 $\{A_j\}_1^M$，要求解析样条 $S_\Delta(z)$，$z\in D^+$，使 $S_\Delta(z_j)=A_j\,(j=1,\cdots,M)$，就是所谓异点插值解析样条；这时除开 $\{z_j\}$ 的某些特殊分布外，$S_\Delta(z)$ 唯一存在。如果 $\{z_j\}$ 在 D^- 中，这种插值样条一般不存在。

由（2.7）和所给出的条件知，要求被插值函数的导数 $f^{(k)}\,(k=0,\cdots,M-1)$ 已知，而后者则要求在区域内部的 M 个点处已知函数值。这和通常数据往往是通过在区域边界上解积分方程得出的方式不同，因而应用上并不方便。而且，如果在 z_0 点处已知 $f(z)$ 的直到 $M-1$ 阶的导数值，则作出的 Taylor 多项式本身已是一个简单很好的逼近。

（三）一些其他问题

1° 一个 n 次多项式如有多于 n 个零点，则必恒等于零。换句话说，设 $\{t_k\}_1^{n+1}$ 是 $n+1$ 个点（它们有些可以相重）。$P_n(z)=\sum_0^n a_jz^j$ 是一多项式，方程组

$$\sum_{j=0}^n a_kt_k^j=0,\ \ k=1,\cdots,n+1$$

表明 $P_n(t_k)=0$，故只有平凡解，从而矩阵 $T=(t_k^j)$ 是满秩的。亦即在 $\{t_k\}_1^{n+1}$ 上给出插值数据，n 次插值多项式唯一存在。因此，在多项式情况，零点个数的上确界估计对插值问题有紧密关系。这一思想可移植到多项式样条上来。陈翰麟在[11]中研究了单位圆周 ∂U 上 n 次样条零点个数问题，对某类 n 次样条的零点个数作出了精确的估计。对于一般形况，零点估计问题尚待探讨。

2° 通过 $f(t)$ 的复插值样条，可以得到 $\int_\Gamma f(t)dt$ 的近似计算公式。对应于每一插值样条就有一个要求积公式。I. J Schoenberg[23]就 U 上均匀分布插值点的情况得出：

$$\int_\Gamma f(t)dt=\sum_{j=0}^{M-1}\tau_jf(\omega^j)+Rf,\ \ \omega=e^{2\pi i/M}, \tag{3.1}$$

余项是 Rf。如果要求当 $f\in\pi_{n-1}$ 时 $Rf=0$，则 $\{\tau_i\}$ 就应取成满足关系式

$$\sum_{j=0}^{M-1}\tau_j\omega^{jm}=0,\ \ m=0,\cdots,n. \tag{3.2}$$

如果 $f(t)\in C^{n+1}$，$q_\Delta(t)$ 是以 $\{\omega^j\}_0^{M-1}$ 为结点的 n 次插值样条，$q_\Delta^{(n)}(t)$ 在 t_j 处的跳跃为 τ_j，则有

$$\int_\Gamma f(t)dt=\sum_{j=0}^{M-1}\tau_jf(\omega^j)+(-1)^{n+1}\int_\Gamma K(t)f^{(n+1)}(t)dt, \tag{3.3}$$

而

$$K(t)=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}-q_\Delta(t)$$

称为单样条（monospline）。

Schoenberg 论证了，当适当选择$\{\tau_j\}_0^{M-1}$，可求出最佳求积公式（在 Sard 意义下，见 **Linear Approximation**, Providence, R. I., 1963），即能使

$$\|K\|_{L_2}=\int_{\Gamma}|K(t)|^2dt$$

达到最小值。

3° C. A. Micchelli 与 A. Sharma 在[20]中，在研究了基数L样条的插值问题之后，转而考虑形如（3.1）的求积公式，但他们要求当$f=t^{\lambda_\nu}$，$\nu=0,\cdots,n(0\leqslant\lambda_0<\cdots<\lambda_n$为整数）时$Rf=0$，并找出了最佳求积公式，从而推广了 Schoenberg 的上述结果。

4° G. Opfer 和 M. Furi[21]还研究了另一种复样条函数，类似于有限元法。他们把区域分成许多小块，然后用分片函数$P(z,\bar z)$在区域中来逼近$f(z)$，这里$z=x+iy$，$\bar z=x-iy$，而$P(z,\bar z)$在每一子区域中是z与$\bar z$的二元多项式。这种样条函数叫做复的平面样条函数，而且一般说来，它在所考虑的区域中是连续的。

关于复样条函数的理论与应用就介绍到这里。复样条的研究应该说还处于极不成熟的阶段，许多问题尚有待去解决。

参考文献

[1] Ahlberg J. H., Splins in the complex plane, 载于 I. J. Schoenberg 主编的 "Approximation with Special Emphasis on Spline Functions", N. Y., 1969, 1—27.

[2] Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L., Complex cubic splines, *Trans. AMS*, 129(1967), 391—413.

[3] ————, Properties of analytic functions I: Complex polynomial splines, *J. Math. Anal. Appl.* 27(1969), 262-278.

[4] ————, Complex polynomial splines on the unit circle, *J. Math. Anal., Appl.* 33 (1971), 234—257.

[5] ————, The analytic spline, *Notices AMS*, 14, 409 (Abstract 67T-270).

[6] Atkinson K., The numerical evaluation of the Cauchy transform on simple closed curves, *SIAM J, Numer, Anal.*, 9(1979). 284-299.

[7] Chatterjee A., Dikshit H. P., Complex cubic spline interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 36(1980), 243-249.

[8] Chen Han-lin (陈翰麟), 复样条函数, 中国科学, 1981, No. 1, 1-12.

[9] ————, Interpolation and approximation on the unit circle, I, *Math, & Compu.*, No. 5/80, ISBN 82-7151-035-5, Univ. of Trondheim(Norway).

[10] ————, Interpolation and approximation on the unit circle II: Complex harmonic splines, *Math.* & Compu., No. 3/81, ISBN, 82-7151-039-8, Univ. of Trondheim (Norway).

[11] ————, The zeros of rational splines and complex splines, *Math.* & Compu., No. 6/81. ISBN 82-7151-043-6, Univ. of Trondheim (Norway).

[12] ————, Interpolation by splines of finite and infinite planar sets, 将在《数学年刊》发表。

[13] Chen Han-lin, Harving T., A new method for the approximation of conformal mapping on the unit circle, *Math. & Compu.*, No. 6/82, ISBN 82-7151-049-5, Univ. of Trondheim(Norway).

[14] Golomb M., Interpolation operators as optimal recovery schemes, 载于 C. A. Micchelli 与 T. J. Rivlin 主编的 "Optimal Estimation in Approximation Theory". Plenum Press, 1977.

[15] Hough D. M., Paparnichael N., *The use of splines and singular functions in the integral* equation method for conformal mapping, *Numer. Math.*, 37(1981), 133-147.

[16] Lu Chien-ke (路可见), Error analysis for interpolating complex cubic splines with deficiency 2, J. Approx, Theory, 36(1982), 183-196.

[17] ______________, The approximation of Cauchy-type integrals by some kinds of interpolatory splines, J, Approx, Theory, 36(1982), 197-212.

[18] ______________, On complex quartic interpolating splienes of higher deficiency, 将在《数学年刊》发表.

[19] Mathur K. K., Sharma A., Discrete polynomial splines on the circle, *Acta Math. Hung.*, 33(1979), 143-153.

[20] Micchelli C. A., Sharma A., Spline function on the circle: Cardinal L-splines revisited, Canadian J. Math., 32(1980), 1459-1473.

[21] Opfer G., Puri M. L., Complex planar splines, J, Approx. Theory, 31(1981), 383-402.

[22] Schoenberg I. J., On polynomial spline functions on the circle, I: Their interpolatory properties, 载于 G, Alerita 与 S, S, Stechkin 主编的 "Construction Theory of Functions", Akad. Kiado, Budapest, 1972, 403-418.

[23] ______________, On polynomial spline functions on the circle, II: Monosplines and quadrature formulae, 同上, 419-423.

[24] Trimbalario J., Interpolation by complex splines, Trans. *AMS* 243(1978), 213-222.

[25] Wronicz Z., On the application of the orthonormal Franklin system to the approximation of analytic function, 载于 "*Approximation Theory*", 4, Banach Center Publ., Warsaw, 1979, 306-316.

[26] ______________, Approximation by complex splines, *Zerzyty Nauk. Univ. Jagielion, Prace Mat.*, No. 20(1979), 67-88.

[27] ______________, Construction of an orthonormal basis in the space of functions analytic in a disc and of class C^n in its closure, *Zeszyty Nauk. Univ. Jagielion, Parce Mat.*, No.21 (1979), 91-96.

[28] ______________, Interpolation by complex cubic slines, 载于 "Constructive Function Theory", Sofia, 1980, 549-588.

[29] Young J. D., Complex cubic splines, *Logist. Transp. Rev.* (Canada), 11(1975), 358-382.

[30] ______________, Complex cubic spline approximation of conjugate harmonic on simple polygonal domains, *Logist. Transp. Rev.*(Canada), 12(1976), 66-87,