第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

BCI 代数的几个新系统*

沈百英

（南京大学数学系）

摘　　要

本文给出由K. Iséki教授引入的BCI代数的四个新系统Y1—Y4。就某种意义上说，它们的组成都比原来的系统简单。

1966年，K. Iséki 教授引进了BCI代数的概念[1]。令X是具有一个二元运算$\dot{-}$和一个常元0的抽象代数。则X是一个BCI代数，如果对所有 $x,y,z\in X$，下列五个条件满足[2]（下文简称为系统BCI）：

BCI1 $((x\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z))\dot{-}(z\dot{-}y)=0$

BCI2 $(x\dot{-}(x\dot{-}y))\dot{-}y=0$

BCI3 $x\dot{-}x=0$

BCI4 $\alpha\dot{-}0=0 \quad \vdash \alpha=0$（即$\alpha\dot{-}0=0$蕴涵$\alpha=0$）

BCI5 $\alpha\dot{-}\beta=0$，$\beta\dot{-}\alpha=0 \quad \vdash \alpha=\beta$（即$\alpha\dot{-}\beta=0$与$\beta\dot{-}\alpha=0$蕴涵$\alpha=\beta$）.

如果上述条件BCI4换为条件$0\dot{-}x=0$（对所有$x\in X$），则得所谓的BCK代数。

关于BCI代数，人们研究得不多，相比之下，人们着眼于BCK代数。事实上，BCI 代数比起BCK代数更基本。本文将给出四个新的BCI系统，它们的组成在某种意义上说比上述系统BCI更简单。

我们先在§0中推导一些系统BCI中的性质。从§1开始将介绍 BCI 代数的新的系统。本文中所有书写推导根据的约定可参见文献[3]。为了省略括号的使用，我们采用左结合的约定。

§0 系统BCI中的定理

定义 $\alpha\leqslant\beta$指$\alpha\dot{-}\beta=0$。

定理

0.01 $\alpha\leqslant\beta$ （1），$\beta=\gamma$ （2） $\vdash \alpha\leqslant\gamma$。

*1983年3月15日收到。

证 $\alpha \dot{-} \beta = \langle(1)\rangle 0$ (3)

$\alpha \dot{-} \gamma = \langle(2)\rangle \alpha \dot{-} \beta = \langle(3)\rangle 0.$

0.02 $\gamma \leqslant \beta$ (1) $\vdash \alpha \dot{-} \beta \leqslant \alpha \dot{-} \gamma.$

证 $(\alpha \dot{-} \beta) \dot{-} (\alpha \dot{-} \gamma) \leqslant \gamma \dot{-} \beta$ (由BCI1) (2)

$\gamma \dot{-} \beta = \langle(1)\rangle 0$ (3)

$(\alpha \dot{-} \beta) \dot{-} (\alpha \dot{-} \gamma) \leqslant 0$ (由0.01，(2)，(3)) (4)

$(\alpha \dot{-} \beta) \dot{-} (\alpha \dot{-} \gamma) = \langle \mathrm{BCI}4;(4)\rangle 0.$

注 此规则可称为加头规则.

0.03 $\alpha \leqslant \beta$ (1)，$\beta \leqslant \gamma$ (2) $\vdash \alpha \leqslant \gamma.$

证 $(\alpha \dot{-} \gamma) \dot{-} 0 = \langle(1)\rangle \quad \alpha \dot{-} \gamma \dot{-} (\alpha \dot{-} \beta) = \langle 0.02;(2)\rangle 0$ (3)

$\alpha \dot{-} \gamma = \langle \mathrm{BCI}4;(3)\rangle 0.$

0.04 $u \dot{-} (z \dot{-} y) \leqslant u \dot{-} (x \dot{-} y \dot{-} (x \dot{-} z)).$

证 $x \dot{-} y \dot{-} (x \dot{-} z) \leqslant z \dot{-} y$ (由BCI1) (1)

再由0.02与(1)即得0.04.

0.05 $x \dot{-} u \dot{-} y \dot{-} (z \dot{-} u) \leqslant x \dot{-} z \dot{-} y.$

证 由0.04，$x \dot{-} u \dot{-} y \dot{-} (z \dot{-} u) \leqslant x \dot{-} u \dot{-} y \dot{-} (x \dot{-} u \dot{-} (x \dot{-} z))$ (1)

再由0.04，$(x \dot{-} u \dot{-} y) \dot{-} (z \dot{-} u) \dot{-} (x \dot{-} z \dot{-} y) \leqslant (x \dot{-} u \dot{-} y) \dot{-} (z \dot{-} u) \dot{-}$

$(x \dot{-} u \dot{-} y \dot{-} (x \dot{-} u \dot{-} (x \dot{-} z))) = \langle(1)\rangle 0$ (2)

由0.01，(2)得$x \dot{-} u \dot{-} y \dot{-} (z \dot{-} u) \dot{-} (x \dot{-} z \dot{-} y) \leqslant 0$ (3)

最后得$(x \dot{-} u \dot{-} y) \dot{-} (z \dot{-} u) \dot{-} (x \dot{-} z \dot{-} y) = \langle \mathrm{BCI}4;(3)\rangle 0.$

0.06 $x \dot{-} y \dot{-} z = x \dot{-} z \dot{-} y.$

证 左$\dot{-}$右$\leqslant \langle 0.05\rangle x \dot{-} (x \dot{-} z) \dot{-} z = \langle \mathrm{BCI}2\rangle 0$ (1)

左$\dot{-}$右$= \langle \mathrm{BCI}4;(1)\rangle 0$ (2)

右$\dot{-}$左$= \langle$同理$\rangle 0$ (3)

左$= \langle \mathrm{BCI}5;(2);(3)\rangle$右.

0.07 $x \dot{-} y \dot{-} (z \dot{-} y) \leqslant x \dot{-} z.$

证 $x \dot{-} y \dot{-} (z \dot{-} y) \dot{-} (x \dot{-} z) = \langle 0.06\rangle x \dot{-} y \dot{-} (x \dot{-} z) \dot{-} (z \dot{-} y) = \langle \mathrm{BCI}1\rangle 0.$

0.08 $\alpha \leqslant \beta$ (1) $\vdash \alpha \dot{-} \gamma \leqslant \beta \dot{-} \gamma.$

证 $\alpha \dot{-} \gamma \dot{-} (\beta \dot{-} \gamma) \leqslant \langle 0.07\rangle \alpha \dot{-} \beta = \langle(1)\rangle 0$ (2)

$\alpha \dot{-} \nu \dot{-} (\beta \dot{-} \gamma) = \langle \mathrm{BCI}4;(2)\rangle 0.$

注 此规则可称为加尾规则.

0.09 $x \dot{-} (x \dot{-} (x \dot{-} y)) = x \dot{-} y.$

证 左$\dot{-}$右$= \langle 0.06\rangle x \dot{-} (x \dot{-} y) \dot{-} (x \dot{-} (x \dot{-} y)) = \langle \mathrm{BCI}3\rangle 0$ (1)

右$\dot{-}$左$= \langle \mathrm{BCI}1\rangle x \dot{-} (x \dot{-} y) \dot{-} y = \langle \mathrm{BCI}2\rangle 0$ (2)

右$\dot{-}$左$= \langle \mathrm{BCI}4;(2)\rangle 0$ (3)

左$= \langle \mathrm{BCI}5;(1);(3)\rangle$右.

0.10 $x \dot{-} 0 = x.$

证 左$\dot{-}$右$= \langle 0.06\rangle x \dot{-} x \dot{-} 0 = \langle \mathrm{BCI}3\rangle 0 \dot{-} 0 = \langle \mathrm{BCI}3\rangle 0$ (1)

右$\dot{-}$左$\dot{-}0 = \langle 0.06\rangle x\dot{-}0\dot{-}(x\dot{-}0) = \langle \mathrm{BCI3}\rangle 0$　（2）

右$\dot{-}$左 $= \langle \mathrm{BCI4};(2)\rangle 0$　（3）

左 $= \langle \mathrm{BCI5};(1);(3)\rangle$ 右.

0.11　$\alpha\dot{-}\beta\leqslant\gamma$　(1)　$\vdash\ \alpha\dot{-}u\dot{-}(\beta\dot{-}u)\leqslant\gamma$.

证　$\alpha\dot{-}\gamma\dot{-}\beta = \langle 0.06\rangle \alpha\dot{-}\beta\dot{-}\gamma = \langle (1)\rangle 0$　（2）

$\alpha\dot{-}\gamma\dot{-}u\leqslant\langle 0.07;(2)\rangle \beta\dot{-}u$　（3）

$\alpha\dot{-}u\dot{-}(\beta\dot{-}u)\dot{-}\gamma = \langle 0.06\rangle \alpha\dot{-}\gamma\dot{-}u\dot{-}(\beta\dot{-}u) = \langle (3)\rangle 0$.

注　此规则可称为广义加尾规则.

§1　系 统 Y1

系统Y1是把系统BCI中的BCI1换为0.07而得. 我们将可看到，在系统Y1中更易推导有关的性质.

系统Y1由下列公理与规则组成：

B　$x\dot{-}y\dot{-}(z\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z)=0$　　BI2　$x\dot{-}(x\dot{-}y)\dot{-}y=0$　　BI3　$x\dot{-}x=0$

BI4　$\alpha\dot{-}0=0\ \vdash\ \alpha=0$　　BI5　$\alpha\dot{-}\beta=0,\ \beta\dot{-}\alpha=0\ \vdash\ \alpha=\beta$.

定理1　系统Y1是BCI代数的一个新系统.

证　系统Y1包含在系统BCI中是显然的. 为了要证明系统BCI包含在系统Y1中，我们只要在系统Y1中证出公式BCI1即可.

1.01　$\alpha\leqslant\beta$ (1)　$\vdash\ \alpha\dot{-}\gamma\leqslant\beta\dot{-}\gamma$.

证　$\alpha\dot{-}\gamma\dot{-}(\beta\dot{-}\gamma)\dot{-}0 = \langle (1)\rangle \alpha\dot{-}\gamma\dot{-}(\beta\dot{-}\gamma)\dot{-}(\alpha\dot{-}\beta) = \langle \mathrm{B}\rangle 0$　（2）

$\alpha\dot{-}\gamma\dot{-}(\beta\dot{-}\gamma) = \langle \mathrm{BI4};(2)\rangle 0$.

1.02　$\alpha\dot{-}\beta=0$ (1)，$\beta\dot{-}\gamma=0$ (2)　$\vdash\alpha\dot{-}\gamma=0$.

证　$\alpha\dot{-}\gamma\dot{-}0 = \langle (2)\rangle \alpha\dot{-}\gamma\dot{-}(\beta\dot{-}\gamma) = \langle 1.01;(1)\rangle 0$　（3）

$\alpha\dot{-}\gamma = \langle \mathrm{BI4};(3)\rangle 0$.

1.03　$x\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}z\dot{-}y)\dot{-}z=0$.

证　$x\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}z\dot{-}y)\leqslant\langle \mathrm{B}\rangle x\dot{-}(x\dot{-}z)$　（1）

$x\dot{-}(x\dot{-}z)\leqslant\langle \mathrm{BI2}\rangle z$　（2）

$x\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}z\dot{-}y)\leqslant\langle 1.02;(1);(2)\rangle z$.

1.04　$\alpha\dot{-}\gamma\dot{-}\beta=0$ (1)　$\vdash\ \alpha\dot{-}\beta\dot{-}\gamma=0$.

证　$\alpha\dot{-}\beta\dot{-}0\dot{-}\gamma = \langle (1)\rangle \alpha\dot{-}\beta\dot{-}(\alpha\dot{-}\gamma\dot{-}\beta)\dot{-}\gamma = \langle 1.03\rangle 0$　（2）

$\alpha\dot{-}\beta\dot{-}\gamma\dot{-}0\dot{-}0 = \langle (2)\rangle (\alpha\dot{-}\beta)\dot{-}\gamma\dot{-}((\alpha\dot{-}\beta)\dot{-}0\dot{-}\gamma)\dot{-}0 = \langle 1.03\rangle 0$　（3）

$\alpha\dot{-}\beta\dot{-}\gamma\dot{-}0 = \langle \mathrm{BI4};(3)\rangle 0$　（4）

$\alpha\dot{-}\beta\dot{-}\gamma = \langle \mathrm{BI4};(4)\rangle 0$.

1.05　$x\dot{-}y\dot{-}z = x\dot{-}z\dot{-}y$.

证　$x\dot{-}y\dot{-}z\dot{-}(x\dot{-}z\dot{-}y) = \langle 1.04;1.03\rangle 0$　（1）

$x\dot{-}z\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}y\dot{-}z) = \langle 1.04;1.03\rangle 0$　（2）

左 $= \langle \mathrm{BI5};(1);(2)\rangle 0$.

1.06　$x\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}z)\dot{-}(z\dot{-}y)=0$　（即BCI1）.

证 左 = $\langle 1.05\rangle x\dot{-}y\dot{-}(z\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z) = \langle \mathrm{B}\rangle 0$.

到此定理1得证。

§2 系统Y2

系统Y2是把系统Y1中的BI2与BI4换为规则1.04而得。因此，系统Y2由下列公理与规则组成：

B $x\dot{-}y\dot{-}(z\dot{-}y)\dot{-}(x\dot{-}z)=0$ BI3 $x\dot{-}x=0$

BI5 $\alpha\dot{-}\beta=0,\ \beta\dot{-}\alpha=0 \ \vdash \alpha=\beta$ C $\alpha\dot{-}\beta\dot{-}\gamma=0 \ \vdash \alpha\dot{-}\gamma\dot{-}\beta=0$.

定理2 系统Y2是BCI代数的一个新系统。

证 系统Y2包含在系统Y1中是显然的。为了证明系统Y1包含在系统Y2中，只须在系统Y2中证出BI2与BI4即可。

2.01 $x\dot{-}(x\dot{-}y)\dot{-}y=0$ （即BI2）。

证 $x\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}y)=\langle \mathrm{BI3}\rangle 0$ （1）

$x\dot{-}(x\dot{-}y)\dot{-}y=\langle \mathrm{C};(1)\rangle 0$.

2.02 $\alpha\dot{-}0=0$ （1） $\vdash \alpha=0$ （即BI4）。

证 $\alpha\dot{-}\alpha\dot{-}0=\langle \mathrm{BI3}\rangle 0\dot{-}0=\langle \mathrm{BI3}\rangle 0$ （2）

$0\dot{-}\alpha=\langle (1)\rangle \alpha\dot{-}0\dot{-}\alpha=\langle \mathrm{C};(2)\rangle 0$ （3）

$\alpha=\langle \mathrm{BI5};(1);(3)\rangle 0$.

于是定理得证。

§3 系统Y3

系统Y3是把系统Y2中的B换为规则0.11而得。因此系统Y3由下列公理与规则组成：

BI3 $x\dot{-}x=0$ BI5 $\alpha\dot{-}\beta=0,\ \beta\dot{-}\alpha=0 \ \vdash \alpha=\beta$

C $\alpha\dot{-}\beta\dot{-}\gamma=0 \ \vdash \alpha\dot{-}\gamma\dot{-}\beta=0$ B1 $\alpha\dot{-}\beta\dot{-}\gamma=0 \ \vdash \alpha\dot{-}u\dot{-}(\beta\dot{-}u)\dot{-}\gamma=0$.

定理3 系统Y3是BCI代数的一个新系统。

证 系统Y3包含在系统BCI中是显然的。现证在系统Y3中可推出BCI1，BCI2与BCI4如下。

3.01 $x\dot{-}(x\dot{-}y)\dot{-}y=0$ （即BCI2）。 **证** 同2.01.

3.02 $\alpha\dot{-}0=0 \ \vdash \alpha=0$ （即BCI4）。 **证** 同2.02.

3.03 $x\dot{-}y\dot{-}z=x\dot{-}z\dot{-}y$.

证 $x\dot{-}(x\dot{-}z)\dot{-}z=\langle 3.01\rangle 0$ （1）

$x\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}z\dot{-}y)\dot{-}z=\langle B1;(1)\rangle 0$ （2）

$x\dot{-}y\dot{-}z\dot{-}(x\dot{-}z\dot{-}y)=\langle \mathrm{C};(2)\rangle 0$ （3）

$x\dot{-}z\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}y\dot{-}z)=\langle 同理\rangle 0$ （4）

左 = $\langle \mathrm{BI5};(3);(4)\rangle$ 右。

3.04 $x\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}z)\dot{-}(z\dot{-}y)=0$ （即BCI1）。

证 $x\dot{-}(x\dot{-}z)\dot{-}z\dot{-}0=\langle 3.01\rangle 0\dot{-}0=\langle \mathrm{BI3}\rangle 0$ （1）

$x\dot{-}y\dot{-}(x\dot{-}z)\dot{-}(z\dot{-}y)\dot{-}0=\langle 3.03\rangle x\dot{-}(x\dot{-}z)\dot{-}y\dot{-}(z\dot{-}y)\dot{-}0=\langle \mathrm{B1};(1)\rangle 0$ （2）

$$x \dot{-} y \dot{-} (x \dot{-} z) \dot{-} (z \dot{-} y) = \langle 3.02; (2) \rangle 0$$

到此定理 3 得证。

§4　系　统 Y4

系统Y4由下列公理与规则组成：

BI3　$x \dot{-} x = 0$　　R　$x \dot{-} 0 = x$　　BI5　$\alpha \dot{-} \beta = 0$，$\beta \dot{-} \alpha = 0$　$\vdash \alpha = \beta$

B2　$\alpha \dot{-} \beta \dot{-} \gamma = 0$　$\vdash (\alpha \dot{-} u) \dot{-} \gamma \dot{-} (\beta \dot{-} u) = 0$.

定理4　系统Y4是BCI代数的一个新系统.

证　在系统BCI中，BI3即为BCI3，R即为0.10，BI5即为BCI5，又由 0.11 与 0.06 易得B2，故系统Y4含于系统BCI中，从而亦含于系统Y3中．下面再证在系统Y4中可推出规则C与BI，从而得系统Y3含于系统Y4中．

4.01　$\alpha \dot{-} \beta \dot{-} \gamma = 0$　(1)　$\vdash \alpha \dot{-} \gamma \dot{-} \beta = 0$　(即规则C).

证　$\alpha \dot{-} \gamma \dot{-} \beta = \langle R \rangle \alpha \dot{-} 0 \dot{-} \gamma \dot{-} (\beta \dot{-} 0) = \langle B2; (1) \rangle 0$.

4.02　$\alpha \dot{-} \beta \dot{-} \gamma = 0$　$\vdash \alpha \dot{-} u \dot{-} (\beta \dot{-} u) \dot{-} \gamma = 0$　(即规则B1).

证　由B2，4.01得.

于是定理 4 得证.

参　考　文　献

[1] Isèki, K., An algebra related with a propositional calculus, *Proc. Japon Acad.*, 42(1966), 26-29.

[2] Isèki, K., On BCI-algebras, *Math. Seminar Notes Kobe Univ.*, 8(1980), 125-130.

[3] 莫绍揆、沈百英，原始递归算术的新系统(I)，数学进展，9(i966)，1-26.

后　　记

上文写成后一年，笔者又有下列改进的结果.

(一) 系统Y1中公理BI4是多余的．今证明如下：

设　$\alpha \dot{-} 0 = 0$　(1)，则

$$0 \dot{-} \alpha = \langle (1) \rangle \alpha \dot{-} 0 \dot{-} \alpha = \langle \mathrm{BI3} \rangle \alpha \dot{-} (\alpha \dot{-} \alpha) \dot{-} \alpha = \langle \mathrm{BI2} \rangle 0 \tag{2}$$

$$\alpha = \langle \mathrm{BI5}; (1); (2) \rangle 0.$$

因此有

定理　由B，BI2，BI3与BI5组成BCI代数.

(二)由上可知，由BI2，BI3与BI5可证出BI4，故在BCI代数的原来定义中(见文[2])，BCI4亦是多余的．于是有

定理　由BCI1，BCI2，BCI3与BCI5组成BCI代数.