第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

满足$\bigvee A\in B$的非原子布尔代数的相对结构*

梁 朴

（北京工业大学数学系）

本文讨论了满足$\bigvee A\in B$的非原子布尔代数与原子、无原子布尔代数在结构上的关系，给出了任意两个这种类型的布尔代数同构的充要条件，并给出了它的一些推论。

一 引 言

原子是布尔代数的极小非零元，如果布尔代数具有原子则称它为有原子的布尔代数，否则为无原子(atomless)布尔代数。设D是有原子的布尔代数，如果D还满足对于所有D的非零元x，存在一原子a使$a\leqslant x$，则称D为原子（atomic）布尔代数。一布尔代数如果它不是原子布尔代数则称之为非原子（not atomic）布尔代数。这些概念之间的关系可用以下图表来表示：

$$\text{布尔代数}\begin{cases}\text{有原子的}\begin{cases}\text{原子的}\\ \text{(其余)}\end{cases}\\ \text{无原子的}\end{cases}\Big\}\text{非原子的}$$

符号说明：在本文中B表示满足条件$\bigvee A\in B$的非原子布尔代数，B'表示和B相区别的布尔代数，它的子集一律在右上角加$'$以示与所对应的B的子集相区别。A_B(简记为A）表示B的全部原子集，E_B（简记为E）表示A的子集的全部上确界集。对于任意X、$Y\subseteq B$，x、$y\in B$，$B_B(X)$、$L_B(X)$（简记为$B(X)$、$L(X)$）分别表示子集X在B中生成的子代数、子格，$\bigvee_B X$、$\bigwedge_B X$（简记为$\bigvee X$、$\bigwedge X$）分别表示X在B中的上、下确界，$\bigvee X\in B$、$\bigwedge X\in B$分别表示X在B中的上、下确界存在（分别为$\bigvee X$、$\bigwedge X$）。X^*表示X的余元素集即$X^*=\{x\in B:x^*\in X\}$。$x\leqslant X$表示$\forall y\in X(x\leqslant y)$，$Y\leqslant X$表示$\forall x\in Y(x\leqslant X)$，$x\bigvee X=\{x\bigvee y\in B:y\in X\}$，$X\bigvee Y=\{x\bigvee y\in B:x\in X\&y\in Y\}$，$\Rightarrow$表示左右两端有因果关系，类似地可以定义$x\geqslant X$、$x\bigwedge X$、$X\bigwedge y$、$\Leftarrow$、$\Leftrightarrow$等的意义，$\cong$表示布尔代数同构，$\overset{(L)}{\cong}$表示格同构。

在定理和引理的证明中我们用到了一些已知的结果，这些结果的证明可以在一般的布尔代数教科书中找到，它们是

*1983年7月28日收到．本文是作者硕士论文的第一部分．推荐者：杨安洲（北京工业大学）．

0.1：对于任意x、$y\in B$有

$$x\leqslant y\Leftrightarrow y^*\leqslant x^*\Leftrightarrow x\wedge y^*=0\Leftrightarrow x^*\vee y=1;$$
$$(x\wedge y)^*=x^*\vee y^*,\ (x\vee y)^*=x^*\wedge y^*.$$

0.2：设$\{x_i:i\in I\}\subseteq B$，$y\in B$

(1) 如果$\vee_{i\in I}x_i\in B$，则$\wedge_{i\in I}x_i^*=(\vee_{i\in I}x_i)^*$；

(2) 如果$\wedge_{i\in I}x_i\in B$，则$\wedge_{i\in I}x_i^*=(\wedge_{i\in I}x_i)^*$；

(3) 如果$\vee_{i\in I}x_i\in B$，则$\vee_{i\in I}(y\wedge x_i)=y\wedge\vee_{i\in I}x_i$；

(4) 如果$\wedge_{i\in I}x_i\in B$，则$\wedge_{i\in I}(y\vee x_i)=y\vee\wedge_{i\in I}x_i$。

0.3：设f是B到B'上的双射，则

(1) f是同构$\Leftrightarrow f$保序；

(2) f是同构$\Leftrightarrow f$保持并．余运算。

0.4：设E、E'是格，g是E到E'上的双射，x、$y\in E$，则

(1) g是格同构$\Leftrightarrow g$保序；

(2) g是格同构$\Rightarrow$“$x=y\Leftrightarrow g(x)=g(y)$”。

0.5：设g是B到B'上的双射，则

g是布尔代数同构$\Leftrightarrow g$是格同构。

0.6：设$B\cong B'$，f是同构函数，E是B的子代数（子格），则$f[E]$是B'的子代数(子格)，并且$f|E$是E到E'上的同构函数。

0.7：B到B'上的映射是双射的充要条件是f^{-1}存在且满足对任意$x\in B$，$f^{-1}(f(x))=x$。

0.8：任意两个可数无穷的无原子布尔代数同构。

0.9：设$Y\subseteq B$是X生成的子代数，则

(1) $Y=\{\vee_{j=1}^{n}\wedge_{k=1}^{m_j}x_{jk}\in B:n、m_j、j、k\in\omega_0\&x_{jk}\in X\cup X^*\}$；

(2) 当$|Y|\geqslant\aleph_0$时$|Y|=|X|$。

0.10：B是X自由生成的充要条件是对于任意X的互不相同元x_1、x_2、…、x_n，有

$$x_1'\wedge x_2'\wedge\cdots\wedge x_n'\neq 0$$

其中x_i'是x_i或x_i^*（$1\leqslant i\leqslant n$），$n<\aleph_0$。

0.11：设I是B的理想，则

(1) I是素理想$\Leftrightarrow I\cup I^*=B$；

(2) I是非主素理想$\Leftrightarrow I\cup I^*=B$并且$VI\notin B$。

二 引理部分

以下引理是为了证明定理以及它的推论而准备的（其中有的引理是引理的引理），它们既是定理以及它的推论的引理，同时又是所讨论的非原子布尔代数的结构的辅助定理，它们帮助建立了这种类型的非原子布尔代数的某些结构细节．由于篇幅所限这些引理的证明一律略去。

1．$E(E^*)$是B的理想(滤子)。

由于理想（滤子）对并、交运算封闭，所以$E(E^*)$又是B的子格（此外还不难验证

$L(E)=E$、$L(E^*)=E^*$）。

2．设$a\in A$，A_0、$A_1\subseteq A$，则

(1) $a\leqslant(A-\{a\})^*$、$A-\{a\}\leqslant a^*$、$A_0\leqslant(A-A_0)^*$；

(2) $A_0\leqslant(A-A_1)^*\Leftrightarrow A_0\subseteq A_1$．

3．设$x\in E(E^*)$且$A_0\leqslant x\leqslant(A-A_0)^*$，则$x=\vee A_0(\wedge(A-A_0)^*)$．

4．设A_0、$A_1\subseteq A$，$\vee A_0$、$\vee A_1\in B$，则

(1) $(\vee A_0)\vee(\vee A_1)=\vee(A_0\cup A_1)$；

(2) $(\vee A_0)\wedge(\vee A_1)=\wedge(A_0\cap A_1)$．

5．设$A_0\subseteq A_1\subseteq A$，$\vee A_0\in E$，则

(1) $\vee A_1\in B\Leftrightarrow\vee(A_1-A_0)\in B$；(2) $\vee(A-A_0)\in B$．

6．E与一原子布尔代数（$E(B)$）格同构．

7．(1) $B(E)=E\cup E^*$，(2) $E\cap E^*=\varnothing$．

8．设$B\cong B'$，f是其同构函数，

(1) $f[A]=A'$；

(2) 如果$\vee A_0\in B$，其中$A_0\subseteq A$，则$f(\vee A_0)=\vee f[A_0]$；

(3) 如果$\wedge A_0^*\in B$，其中$A_0\subseteq A$，则

$$f(\wedge A_0^*)=\wedge f[A_0^*]=\wedge(f[A_0])^*.$$

9．设$E\overset{(L)}{\cong}E'$，g是其格同构函数，A表示E的全部非零极小元集，$A_0\subseteq A$，

(1) $g[A]=A'$；

(2) 如果$\vee A_0\in E$，则$g(\vee A_0)=\vee g[A_0]$；

(3) 如果$\wedge A_0^*\in E$，则$g(\wedge A_0^*)=\wedge g[A_0^*]=\wedge(g[A_0])^*$．

对于任意$A_0\subseteq A$，再规定

$$G_{A_0}\{x\in B:A_0\leqslant x\leqslant(A-A_0)^*\}.$$

特别地当$A_0=\varnothing$时有$G_\Phi=\{x\in B:x\leqslant A^*\}$．

10．(1) $G_{A_0}^*=G_{A-A_0}$，$G_\Phi^*=G_A$；

(2) $\aleph_0\leqslant|G_\Phi|\leqslant\aleph_\alpha$（设$B$的基数为$\aleph_\alpha$）．

11．(1) 设$A=\varnothing$，则$G_\Phi(G_A^*)=B$；(2) $A\neq\varnothing$，则$G_\Phi(G_\Phi^*)$是B的理想（滤子）

12．(1) $B(G_\Phi)=G_\Phi\cup G_\Phi^*$；(2) 设$A\neq\varnothing$，则$G_\Phi\cap G_\Phi^*=\varnothing$．

13．G_Φ与一无原子布尔代数（$G_\Phi(B)$）格同构．

14．$B=\bigcup\limits_{A_0\subseteq A}G_{A_0}$，其中诸$G_{A0}$（$A_0\subseteq A$）两两互不相交．

15．设$G_{A_0}\neq\varnothing$，其中$A_0\subseteq A$，则$\vee A_0\in B$．

16．设$A_0\subseteq A$，$\vee A_0(\wedge(A-A_0)^*)\in B$，令映射$h_{A_0}(h_{A_0}^*):G_\Phi(G_\Phi^*)\to G_{A_0}$满足对于任意$x\in G_\Phi(G_\Phi^*)$，$h_{A_0}(x)=(\vee A_0)\vee x$（$h_{A_0}^*(x)=\wedge(A-A_0)^*\wedge x$），则$h_{A_0}(h_{A_0}^*)$是格同构．

17．$B=\{h_{A_0}(x):A_0\subseteq A\&\vee A_0\in B\&x\in G_\Phi\}$．

18．设$h_{A_0}(x)\geqslant h_{A_1}(y)$，则$x\geqslant y$．

19．设$x\geqslant y$，其中$x\in G_{A0}$、$y\in G_{A_1}$，则$A_0\supseteq A_1$．

三 定理与定理的证明

定理 任意两个满足 $\vee A\in B$ 的非原子布尔代数 B、B' 同构的充要条件是它们的原子集子集的全部上确界集 E、E' 格同构以及它们的全部不可与原子比较大小的元素与 O 的集 G_ϕ、G'_ϕ 格同构，即

$$B\cong B'\Longleftrightarrow E\overset{(L)}{\cong}E'\&G_\phi\overset{(L)}{\cong}G'_\phi.$$

证明 $\Rightarrow$：设 $B\cong B'$，f 是其同构函数，为了证明 $E\overset{(L)}{\cong}E$、$G_\phi\overset{(L)}{\cong}G_\phi$，只要证明 $f[E]=E'$、$f[G_\phi]=G'_\phi$ 即可（引理 0.6）。设 $x\in f[E]$，令 $x=f(\vee A_0)$，其中 $A_0\subseteq A$，根据引理 8(2)，$x=\vee f[A_0]$，再由引理 8 (1)，$f[A_0]\subseteq A'$，$x=\vee f[A_0]\in E'$ 得 $f[E]\subseteq E'$。因为 f 是同构，所以 f^{-1} 也是同构，根据和上面同样的讨论得 $f^{-1}[E']\subseteq E$，两边用 f 作用一下又得 $E'\subseteq f[E]$，所以 $f[E]=E'$。再设 $x\in f[G_\phi]$，令 $x=f(y)$ 其中 $y\in G_\phi$，$y\leqslant A^*$，因为 f 是同构、保序、保持余运算（引理 0.3），所以 $x=f(y)\leqslant f[A^*]=(f[A])^*=(A')^*$，$x\in G'_\phi$，得 $f[G_\phi]\subseteq G'_\phi$，再利用 f^{-1}，又得 $f^{-1}[G'_\phi]\subseteq G_\phi$，$G'_\phi\subseteq f[G_\phi]$，所以 $f[G_\phi]=G'_\phi$。

$\Leftarrow$：设 $E\overset{(L)}{\cong}E'$ 且 $G_\phi\overset{(L)}{\cong}G'_\phi$，令 g、f_ϕ 分别表示它们的同构函数，根据引理 17

$$B=\{h_{A_0}(x):A_0\subseteq A\&\vee A_0\in B\&x\in G_\phi\}$$
$$B=\{h'_{A'_0}(x'):A'_0\subseteq A'\&\vee A'_0\in B'\&x'\in G'_\phi\}$$

定义映射（是映射下面要证明）$f:B\to B'$ 满足对任意 $z\in B$，设 $z=h_{A_0}(x)$，其中 $A_0\subseteq A$、$x\in G_\phi$，$f(z)=h'_{g[A_0]}(f_\phi(x))$，则

①f 是映射：

设 $z_0=z_1\in B$，令 $z_0=h_{A_0}(x)$、$z_1=h_{A_1}(y)$，其中 x、$y\in G_\phi$，由假设 A_0、$A_1\subseteq A$，$\vee A_0$、$\vee A_1\in B$，因为 $z_0=z_1$ 根据引理 14，诸 $G_{A_0}(A_0\subseteq A)$ 两两互不相交，得 $A_0=A_1$，因此 $\vee A_0=\vee A_1$，$\vee g[A_0]=g(\vee A_0)=g(\vee A_1)=\vee g[A_1]$（$g$ 是格同构及引理9），再根据引理16，诸 $h_{A_0}(A_0\subseteq A)$ 是格同构，特别地 h_{A_0} 是格同构，由 $z_0=z_1$ 即 $h_{A_0}(x)=h_{A_0=A_1}(y)$ 得 $x=y$（引理0.4(2)），$f_\phi(x)=f_\phi(y)$（f_ϕ 是格同构及引理0.4(2)），因此 $h'_{g[A_0]}(f_\phi(x))=(\vee g[A_0])\vee f_\phi(x)=(\vee g[A_1])\vee f_\phi(y)=h'_{g[A_1]}(f_\phi(y))$ 即 $f(z_0)=f(z_1)$。

②f 是双射：

由于 f_ϕ 与 g 是格同构，它们的逆映射 f_ϕ^{-1}、g^{-1} 也都是格同构，因此上面的证明是可逆的，在①的证明中把 B、B' 的位置对调，把 f_ϕ、g 全部换成 f_ϕ^{-1}、g^{-1}，则得到 B' 到 B 上映射 f^{-1} 满足对任意 $x\in B$，$f^{-1}(f(x))=x$，这说明 f 是双射（引理0.7）。

③f 保序：

设 $z_0\geqslant z_1\in B$，令 $z_0=h_{A_0}(x)$、$z_1=h_{A_1}(y)$，其中 x、$y\in G_\phi$，假设中含有条件

$$\vee A_0、\vee A_1\in B, \tag{1}$$

条件 $z_0\geqslant z_1$ 即

$$h_{A_0}(x)\geqslant h_{A_1}(y), \tag{2}$$

根据引理18，由（2）得 $x\geqslant y$，

由于 f_ϕ 是同构，所以又得

$$f_\phi(x)\geqslant f_\phi(y), \tag{3}$$

再由(2)、(1)，根据引理 19 得

$$A_0\supseteq A_1、\vee A_0\geqslant \vee A_1,$$

由于g是格同构，再根据引理 9 得

$$g[A_0]\supseteq g[A_1]、\vee g[A_0]\geqslant \vee g[A_1], \tag{4}$$

因此（由(3)、(4)）

$$h'_{g[A_0]}(f_\phi(x))=(\vee g[A_0])\vee f_\phi(x)\geqslant(\vee g[A_1])\vee f_\phi(y)=h'_{g[A_1]}(f_\phi(y))$$

即

$$f(z_0)\geqslant f(z_1).$$

根据引理 0.3(1)，由以上②、③的结果得f是同构，因此$B\cong B'$.

四　几个推论

条件$\vee A\in B$没有对B的基数作任何限制，下面我们对B的基数作一限制，考虑任意两个满足条件$\vee A\in B$的可数无穷非原子布尔代数B、B'. 根据引理 10，在现在的条件下（即$|B|=\aleph_0$）得$|G_\phi|=\aleph_0$，因此G_ϕ与一可数无穷无原子布尔代数格同构（引理13），再根据引理0.8：任意两个可数无穷无原子布尔代数同构得$G_\phi\overset{(L)}{\cong}G'_\phi$，因此在现在的条件（$|B|=\aleph_0$）下，我们已经得到$G_\phi\overset{(L)}{\cong}G'_\phi$，这样$B$、$B'$是否同构只要看子格$E$的情况就够了，于是得到

推论1　设$|B|=\aleph_0$，则

$$B\cong B'\Longleftrightarrow E\overset{(L)}{\cong}E'.$$

再考虑具有有限个原子的可数无穷非原子布尔代数. 由于原子个数有限，$\vee A\in B$这个条件自然满足，因此定理 1 对于这种类型的布尔代数成立，在现在的情况下，不但G_ϕ的情况被唯一确定，而且E的情况也被A的个数所唯一确定，因此"任意两个具有相同有限个原子的可数无穷非原子布尔代数同构"，当原子的个数无限（$\aleph_0$）时，上面的结论不再成立，例如直接积$FX\cdot C_0$与$B_{PX}(\boldsymbol{X}\cup\{X_0\})$就是两个不同构的例子，其中$X$是基数为$\aleph_0$的集合，$FX$是$X$的有限余有限代数，$C_0$是可数无穷无原子布尔代数，$\boldsymbol{X}=\{\{x\}\in PX:x\in X\}$，$PX$是$X$的幂集代数，$X_0$是$X$的一个无穷子集满足$|X-X_0|=|X_0|=\aleph_0$即既不是有限也不是余有限的$X$的子集，$B_{PX}(\boldsymbol{X}\cup\{X_0\})$表示子集簇$\boldsymbol{X}\cup\{X_0\}$在$PX$中生成的子代数. $FX\cdot C_0$与$B_{PX}(\boldsymbol{X}\cup\{X_0\})$都是具有$\aleph_0$个原子的可数无穷非原子布尔代数，但是它们不同构. 把上面两个情况放到一块便得到如下结果：

推论2　非原子布尔代数B的理论是$\aleph_0$范畴的充要条件是B具有有限个原子.

令B_{β_γ}表示具有$\aleph_\gamma$个原子，$\aleph_\beta(\gamma\leqslant\beta)$完全的非原子布尔代数，对于这种类型的非原子布尔代数，由于$\gamma\leqslant\beta$知$\vee A\in B$，满足定理的条件，因此对于任意两个具有相同个原子的这种类型的布尔代数B_{β_γ}、$B_{\beta'_\gamma}$（其中β、β'可以不同）有

推论3　$B_{\beta_\gamma}\cong B_{\beta'_\gamma}\Longleftrightarrow G_\phi\overset{(L)}{\cong}G'_\phi$.

这是因为根据定理我们有$B_{\beta\gamma}\cong B_{\beta'\gamma}\Longleftrightarrow E\overset{(L)}{\cong}E'\ \&G_\phi\overset{(L)}{\cong}G'_\phi$，而在现在的情况下($\gamma\leqslant\beta\&|A|=|A'|=\gamma$)，由$\gamma\leqslant\beta$知$E$、$E'$都与一幂集代数格同构，我们知道任意两个幂集代数同构的充要条件是它们的原子个数相等，再由$|A|=|A'|=\gamma$得$E\overset{(L)}{\cong}E'$，因此得到以上推论.

设$\mathbf{B}_m$表示基数为m的满足条件$\bigvee A\in B$的非原子布尔代数的集合，B_m表示$\mathbf{B}_m$的元，

$$\widehat{B}_m=\{B\in\mathbf{B}:B\cong B_m\},\quad \widehat{\mathbf{B}}_m=\{\widehat{B}:B\in\mathbf{B}_m\}.$$

再设符号C、D分别表示无原子、原子布尔代数，类似地定义$\mathbf{C}_m$、C_m、$\widehat{C}$、$\widehat{\mathbf{C}}_m$，$\mathbf{D}_m$、D_m、$\widehat{D}_m$、$\widehat{\mathbf{D}}_m$等的意义.不难得到以下结论：

推论4：设$\lambda_B=\sum\limits_{0\leqslant\aleph_\alpha\leqslant\aleph_\beta}|\widehat{\mathbf{B}}_{\aleph_\alpha}|$、$\lambda_C=\sum\limits_{0\leqslant m\leqslant\aleph_\alpha}|C_m|\lambda_D=\sum\limits_{0\leqslant m\leqslant\aleph_\alpha}|\widehat{\mathbf{D}}_m|$，则$\lambda_B=\lambda_C\cdot\lambda_D$.

最后给出B与$E(B)$、$G_\phi(B)$的直接积的关系，其中$E(B)$表示与E格同构的原子布尔代数（引理6），$G_\phi(B)$表示与G_ϕ格同构的无原子布尔代数（引理13）.

推论5　$B\cong E(B)\cdot G_\phi(B)$.

本文是在杨安洲教授的指导下完成的，特此致以衷心的感谢.

The Relative Structure of the Boolean Algebras which are not Atomic and Satisfy that $\bigvee A\in B$

Liang Po（梁　朴）

(Dept. of Math., Industrial University of Peking)

Abstract

In this paper we discuss the structural relations between the Boolean algebras which are not atomic and satisfy that $\bigvee A\in B$ and the Boolean algebras which are atomic or atomless, present the sufficient and necessary condition that any two Boolean algebras of this kind are isomorphic and draw a lot of corollary of it.