第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITIOH

Vol.5 No.2
April 1985

$S_p(2n,F_2)$中含长根子群的极大子群系*

李尚志 查建国

（中国科学技术大学数学系）

在[1]中，我们确定了当$F\neq F_2$时射影辛群$PS_p(2n,F)$中含T-子群的全部极大子群。这里，T-子群是指任一方向上全体辛平延组成的群，也就是长根子群。本文将定出$S_p(2n,F_2)$中含长根子群的全部极大子群，从而完成对射影辛群中含长根子群的极大子群的分类。本文的结果是：

定理 $G=S_p(2n,F_2)$是作用在域F_2上$2n$维辛空间V上的辛群，则下列五类子群是G中含长根子群的全部极大子群：

i) V的全迷向子空间的定驻子群；

ii) V的非退化子空间W的定驻子群，其中$\dim \overline{W}<n$；

iii) 子空间集合$\{V_1,\cdots,V_r\}$的定驻子群，这里$V=V_1\perp\cdots\perp V_r$，$\dim V_i=2s$，$(1\leqslant i\leqslant r)$，$s>1$，或$s=1$且$r=2$。

iv) G所含的正交群$O(2n,F_2,Q)$，这里Q是在V上定义的二次型，且对任意$x,y\in V$，满足

$$Q(x+y)=Q(x)+Q(y)+(x,y).$$

v) $G=S_p(4k,F_2)(k\geqslant 2)$中所嵌入的对称群$S_{4k+2}$。这里的嵌入映射定义如下：取$F_2$上$4k+2$维辛空间$V(4k+2,F_2)=\langle x_1,\cdots,x_{4k+2}\rangle$，其中$(x_i,x_j)=1(1\leqslant i<j\leqslant 4k+2)$，则作用于集合$\{x_1,\cdots,x_{4k+2}\}$上的对称群$S_{4k+2}$被嵌入辛群$S_p(V)$，这里$4k$维空间$V=\{\sum_{i=1}^{4k+2}a_ix_i \mid \sum_{i=1}^{4k+2}a_i=0\}/\langle x_1+\cdots+x_{4k+2}\rangle$中的辛内积由$V(4k+2,F_2)$中内积诱导而成。(这个嵌入映射当$k=1$时是满射，也就是$S_6$到$S_p(4,F_2)$上的同构映射)。

本文采用的符号都是[1]，[2]中说明过的。

[1]中证明了第i)，ii)，iii)类子群的极大性，[3]中证明了第iv)类子群的极大性。现将第v)类子群在G中的极大性证明如下：

S_{4k+2}中的对换(ij)就是G中平延$T_{x_i+x_j,1}$，故$L(S_{4k+2})\supseteq L=\{x_i+x_j|1\leqslant i<j\leqslant 4k+2\}$。若$L$中二相异向量$w_1,w_2$之和$w_1+w_2$仍在$L$中，则$w_1,w_2$具有形式$x_i+x_j,x_i+x_k$，$(i,j,k$两两不相等)。这一性质在任一$g\in \mathrm{stab}L$作用后仍保持，故$(x_1+x_i)g=x_{j_1}+x_{j_i}(2\leqslant i\leqslant 4k+2)$，$j_1,\cdots,j_{4k+2}$是$1,2,\cdots,4k+2$的一个置换$\sigma$，故$g\sigma^{-1}$定驻每一$x_1+x_i(2\leqslant i\leqslant 4k+2)$，从而是$G$中单位元，即$g=\sigma\in S_{4k+2}$。这说明$\mathrm{stab}L=S_{4k+2}$。若$G\geqslant X\gneqq S_{4k+2}$，则$L(X)$包含某个$x_{i_1}+\cdots+x_{i_l}$，这里$i_1,\cdots,i_l$两两不同且$4\leqslant l\leqslant 2k$，用$S_{4k+2}$作用后知$L(X)$包含$u_1=$

*1982年4月28日收到。

$x_1+x_2+x_3+u_0$ 及 $u_2=x_4+x_5+x_6+u_0$，这里 $u_0=\sum_{i=7}^{l+3}x_i$。由 $(u_1,u_2)=1$ 知 $L(X)$ 包含 $u_1+u_2=\sum_{i=1}^{6}x_i$ 从而包含所有的 $\sum_{j=1}^{6}x_{i_j}$。($i_1,\cdots,i_6$ 两两不同)。V中任一非零向量（必要时可加上 $x_1+\cdots+x_{4k+2}$）可写成形式 $w=\sum_{j=1}^{4r+2}x_{i_j}$ ($0\leqslant r\leqslant k-1$，$i_1,\cdots,i_{4r+2}$ 两两不同)。我们对 r 作归纳证明所有这样的 $w\in L(X)$ 从而 $X=G$。$r=0,1$ 时已成立。设对 $r-1$ 已成立，则由 $w_1=\sum_{i=1}^{4r-3}x_i+x_{4r+3}$ 及 $w_2=\sum_{i=4r-2}^{4r+3}x_i$ 含于 $L(X)$ 以及 $(w_1,w_2)=1$ 知 $w_1+w_2=\sum_{i=1}^{4r+2}x_i$ 含于 $L(X)$，再用 S_{4k+2} 作用即得所需结论。

下面证明，如果M是G中任一含长根子群（即 $L(M)$ 非空）的极大子群，则M是定理所列五种类型之一。

情况Ⅰ．在[1]中已证明了：

I_1。若 $L(M)$ 中向量张成 V 的真子空间，则M是第 i) 类极大子群。

I_2。若 $\langle L(M)\rangle=V$，但 $L(M)$ 中向量构成的任一条斜交链张成的子空间都是 V 的真子空间，则M是第 ii) 或第 iii) 类极大子群。

我们要证明，若存在至少三维的子空间 $U\subseteq L(M)$，则上述条件 I_1 或 I_2 被满足。

用反证法，设 I_1,I_2 都不满足，即存在由 $L(M)$ 中向量构成的斜交链，其中的向量张成 V。取 $L(M)$ 所含的子空间U使 $\dim U$ 最大。若U退化，则有 $0\neq u\in\ker U=U\cap U^{\perp}$。由于 $\langle L(M)\rangle=V$，有 $w\in L(M)$ 与 u 不正交。对任意 $v\in U$，若 $(v,w)=1$，则 $v+w\in L(M)$；若 $(v,w)=0$，则由 $(u+v,w)=1$ 得 $u+v+w\in L(M)$，又由 $(u,u+v+w)=1$ 得 $v+w=u+(u+v+w)\in L(M)$。于是 $L(M)$ 含有子空间 $\langle U,w\rangle$，与U的极大性矛盾。因此，U是非退化的，$\dim V\geqslant 4$。

如果 $L(M)$ 中向量都属于U或 $U^{\perp}$，则任一条由 $L(M)$ 中向量组成的斜交链含于U或$U^{\perp}$，不能张成 V，与假设矛盾。故应有 $u+w\in L(M)$，其U分量 u 与 $U^{\perp}$ 分量w都不为 0 。但 M 包含由U中向量决定的全体辛平延；从而包含这些辛平延生成的U上的辛群 $S_p(U)$，而 $S_p(U)$ 可将 u 变到U中任一非零向量 v，从而 $v+w\in L(M)$．$L(M)$ 中还有向量 $u'+w'$ 与 w 不正交。若 $u'=0$，则可用 $u+w+w'\in L(M)$ 代替 w'，故不妨一开始就设 $u'\neq 0$，于是同样可推出 $v+w'\in L(M)$ 对任一 $0\neq v\in U$ 成立。取U中相互正交的二相异向量 u_1,u_2，则 $L(M)$ 包含 $(w+u_1)+(w'+u_1)=w+w'$ 及 $(w+u_1)+(w'+u_2)=(w+w')+(u_1+u_2)$，由此推出 $L(M)\supseteq\langle U,w+w'\rangle$，与$U$的极大性矛盾。如所欲证。

上面的证明中利用了[1]中证明过的简单事实：若 $x,y\in L(M)$ 且 $(x,y)\neq 0$，则 $x+y\in L(M)$。这一事实还将反复用到。

以下总假定条件 I_1,I_2 都不满足，我们要证明此时M是第 iv) 或第 v) 类子群。

任一 $x\in V$ 可写成 $x=x_1+\cdots+x_m$，其中 $x_1,\cdots,x_m\in L(M)$。我们还可选 $x_1,\cdots,x_m$ 两两正交。实际上，若选m最小，任一对 x_i,x_j 必然正交，（否则用 $x_i+x_j\in L(M)$ 代替 x_i,x_j 可将表达式缩短）。当然，将 x 表示成 $L(M)$ 中向量的正交和，表达式不是唯一的。

情况Ⅱ。如果 x 表示成 $L(M)$ 中向量的正交和的长度（即项数）的奇偶性是唯一确定的，则M是第 iv) 类极大子群。证明如下：

对任意 $x\in V$，定义

$$Q(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 的正交和长度是奇数。}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 的正交和长度是偶数。}\end{cases}$$

令 $x=x_1+x_2+\cdots+x_k$，$y=y_1+y_2+\cdots+y_m$ 分别是 V 中任一对向量 x,y 的正交和表达式，我们对 k 作归纳法来证明 $Q(x+y)=Q(x)+Q(y)+(x,y)$。$k=0$ 时显然。设等式对 $k-1$ 已成立。设 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 中与 x_k 不正交的向量共有 l 个，不妨设就是 $y_1,\cdots,y_l$，于是 $y_l^*=x_k+y_1+\cdots+y_l\in L(M)$，令 $x^*=x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}$，$y^*=y_l^*+y_{l+1}+\cdots+y_m$，则由归纳假设

$$Q(x+y)=Q(x^*+y^*)=Q(x^*)+Q(y^*)+(x^*,y^*),$$

但 $Q(x^*)\equiv k-1(\mathrm{mod}2)$，$Q(y^*)\equiv m-l+1(\mathrm{mod}2)$，

$$(x^*,y^*)=(x+x_k,x_k+y)=(x,y)+(x_k,y)=(x,y)+l,$$

因此

$$Q(x_j^*)+Q(y^*)+(x^*,y^*)\equiv k+m+(x,y)(\mathrm{mod}2),$$

即 $Q(x+y)=Q(x)+Q(y)+(x,y)$。这说明 Q 是二次型且 $O(2n,F_2,Q)<S_p(V)$。

M 中任一元素 g 将 x 的正交和 $x=x_1+\cdots+x_m(x_i\in L(M),1\leqslant i\leqslant m)$ 变到 xg 的正交和 $xg=x_1g+\cdots+x_mg(x_ig\in L(M)，1\leqslant i\leqslant m)$，故 $Q(xg)=Q(x)$。这说明 $M\leqslant O(2n,F_2,Q)$，由 M 的极大性知 $M=O(2n,F_2,Q)$，是第 iv) 类极大子群。

现在讨论剩下的情况：

情况Ⅲ。情况Ⅰ,Ⅱ都不满足，我们证明 M 必是第 v) 类极大子群。我们先建立在此情况下成立的两个引理：

引理 1　若 x,y 是 $L(M)$ 中两个相互正交的向量，则存在 $u\in L(M)$，使 u 与 x,y 都不正交。

取 $L(M)$ 中斜交链 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 张成 V。其中必有 $x_{i_1}\notin x^{\perp}$，又有 $x_{i_2}\notin x_{i_1}^{\perp}(i_1<i_2),\cdots$，最后得到链 $x,x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},\cdots,x_1$，其中 $i_1>i_2>\cdots>1$ 且相邻两项不正交。同样有 $y,x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_1$，其中 $j_1>j_2>\cdots>1$ 且相邻两项不正交。于是得到从 x 到 y 的斜交链

$$x,x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_1,\cdots x_{j_2},x_{j_1},y,$$

其中相邻两项不正交。取链中最前面一个与 y 不正交的向量作为 y_1，最前面一个与 y_1 不正交的向量作为 y_2，…最后得到链 $y,y_1,y_2,\cdots,y_l,x$，其中相邻两项不正交，不相邻的项正交，于是 $u=y_1+y_2+\cdots+y_l$ 是 $L(M)$ 中与 x,y 都不正交的向量。

引理 2　若 x,y 是 $L(M)$ 中两个互相正交的向量，则 $x+y\notin L(M)$。

由引理 1，在 $L(M)$ 中存在与 x,y 都不正交的向量 u，$L(M)$ 包含 $x+u,y+u$ 及 $x+u+y$。如果 $x+y\in L(M)$，则 $L(M)$ 包含三维子空间 $\langle x,y,u\rangle$，已证过这将导致情况Ⅰ，矛盾。

下面证明 M 是第 v) 类子群。

存在 $x\in V$，可用两种形式表为 $L(M)$ 中向量的正交和：$x=x_1+x_2+\cdots+x_l=y_1+y_2+\cdots+y_m$，其中 l 与 m 的奇偶性不同，即 $l+m$ 为奇数。设与 x_l 不正交的 y_i 共有 m_1 个，不妨设为 $y_1,\cdots,y_{m_1}$，由 $(x_l,x)=0$ 知 m_1 为偶数。我们有 $y_{m_1}^*=x_l+y_1+\cdots+y_{m_1}\in L(M)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{l-1}=y_{m_1}^*+y_{m_1+1}+\cdots+y_m$ 是同一向量表为 $L(M)$ 中向量正交和的两种方式，右边的长度为 $m-m_1+1$，左右两边的长度和 $(l-1)+(m-m_1+1)=l+m-m_1$ 仍为奇数。这说明，如果一开始就选择 l 最小，则 $l=1$，即 $x=y_1+y_2+\cdots+y_m\in L(M)$。再选择 m 最小，则 $y_1,\cdots,y_m$ 线性无关（若不然，不妨设 $y_m=y_1+y_2+\cdots+y_r$，$r<m$，由 m 的最小性知 r 不能为偶数，只能为奇数，将 y_m 的这个表示式代入就得 $x=y_{r+1}+\cdots+y_{m-1}$，右边长度 $m-r-1$ 是小于 m 的偶数，仍与 m 的最小性矛盾）。所选定的表达式 $x=y_1+\cdots+y_m$ 还具有下面的性质：

$L(M)$中任一向量w不能与$y_1,y_2,\cdots,y_m$中的三个向量不正交。

若不然，设w与$y_1,\cdots,y_r$不正交，而与$y_{r+1},\cdots,y_m$正交，$r\geqslant 3$。则$y_r^*=w+y_1+\cdots+y_r\in L(M)$。若$r$是偶数，则$x$的正交和$x=w+y_r^*+y_{r+1}+\cdots+y_m$具有偶数长度$m-r+2<m$；若$r$是奇数，则$(w,y_r^*)=1$从而$w+y_r^*\in L(M)$，$x$的正交和$x=(w+y_r^*)+y_{r+1}+\cdots+y_m$具有偶数长度$m-r+1<m$。都同$m$的最小性矛盾。

对每个$i(1\leqslant i\leqslant m)$，由引理1，存在$w_i$与$x,y_i$都不正交。与$w_i$不正交的$y_j(1\leqslant j\leqslant m)$个数只能是小于3的奇数1，即$(w_i,y_j)=0$对$j\neq i$。易见$y_1,\cdots,y_m,w_1,\cdots,w_m$线性无关。实际上，若$\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i y_i+\beta_i w_i)=0$，两边与$y_i$作内积则得$\beta_i=0$，再由$y_1,\cdots,y_m$线性无关得所有$\alpha_i=0$。对每个$i(2\leqslant i\leqslant m)$，若$(w_1,w_i)=0$，则$(w_1,x+w_i)=1$，且$x+w_i$是$L(M)$中与$x,y_i$都不正交的向量，可用来代替$w_i$，故不妨设$(w_1,w_i)=0$。若有某一对$i,j$使$(w_i,w_j)=0$，则$w_i+w_1+w_j\in L(M)$且与$y_i,y_1,y_j$不正交，前已证过这不可能。故$w_1,\cdots,w_m$两两的内积是1。记$m=2k$，取$F_2$上$4k+2$维辛空间$V(4k+2,F_2)=\langle x_1,\cdots,x_{4k+2}\rangle$，$(x_i,x_j)=1(1\leqslant i<j\leqslant 4k+2)$。则可将$V$的$4k$维子空间$\langle y_1,\cdots,y_{2k},w_1,\cdots w_{2k}\rangle$保内积地同构映到辛空间$W=\left\{\sum_{i=1}^{4k+2}a_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{4k+2}x_i=0\right\}/\langle x_1+\cdots+x_{4k+2}\rangle$使$y_i=x_i+x_{2k+i},w_i=x_i+x_{4k+1}(1\leqslant i\leqslant 2k)$，且$x=y_1+\cdots+y_{2k}=x_{4k+1}+x_{4k+2}$。将作用于$\{x_1,\cdots,x_{4k+2}\}$上的对称群$S_{4k+2}$嵌入辛群$S_p(w)$，则$M$包含对换$\{(i\ 2k+i),(i\ 4k+1),(4k+1\ 4k+2)\mid 1\leqslant i\leqslant 2k\}$从而包含它们生成的$S_{4k+2}$。如果$W=V$，则由$S_{4k+2}$的极大性。知$M=S_{4k+2}$是第v)类子群。

剩下的一件事是证明不可能$W\neq V$。若不然，则有$u_1+u_{m+1}\in L(M)$，这里u_1,u_{m+1}分别是$W,W^{\perp}$中非零向量。同时还有$u_2+u_{m+2}\in L(M)$，这里u_{m+2}是$W^{\perp}$中与u_{m+1}不正交的向量，$u_2\in W$，且不妨设$u_2\neq 0$(否则可用$u_1+(u_{m+1}+u_{m+2})$代替u_{m+2})。设$u_1=x_{i_1}+\cdots+x_{i_l}$，必要时用$u_1+(x_1+\cdots+x_{4k+2})$代替$u_1$，总可使$l\leqslant 2k$，且不妨设已用$S_{4k+2}$作用使$u_1=x_1+\cdots+x_l$。由$u_1$与$y_1,\cdots,y_l$不正交知$l$只能是小于3的偶数2，即$u_1=x_1+x_2$。同理可设$u_2=x_3+x_4$，于是$L(M)$包含$(u_1+u_{m+1})+(u_2+u_{m+2})=x_1+x_2+x_3+x_4+(u_{m+1}+u_{m+2})$与$y_1,y_2,y_3,y_4$不正交，矛盾。这就完成了我们的证明。

参　考　文　献

[1] 李尚志、查建国，射影辛群的几类极大子群，中国科学，1982，5.

[2] 李尚志、查建国，有限射影特殊酉群的几类极大子群，中国科学，1982，2：125—131.

[3] 李尚志，辛群和酉群中所含正交群的极大性，数学研究与评论，vol. 3(1983)，NO.1，101—103.

The Maximal Subgroups in $S_p(2n,F_2)$ Containing Long Root Subgroups

Li Shang-zhi, Zha Jian-guo

(Depart. of Math., China University of Science and Technology)

Abstract

All maximal subgroups in $PS_p(2n,F)$ which contain long root subgroups have been determined in [1] for $F\neq F_2$ and will be determined here for $F=F_2$. Other than the three types of reducible or imprimitive maximal subgroups listed in[1], we have here the orthogonal groups $O(2n,F_2,Q)$ and the symmetric groups S_{2n+2} (n even and $\geqslant 4$) to complete our list.