第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

一阶共形对称空间*

王英华

（杭州大学）

如所知，若V_n是一阶黎曼空间，则V_n在外围平坦空间S_{n+1}中的Gauss方程为[1]

$$R_{hijk}=e(H_{hj}H_{ik}-H_{hk}H_{ij}),\tag{1}$$

式中的R_{hijk}和H_{ij}分别是V_n的黎曼曲率张量和第二基本张量[1)]；$e=\pm1$由V_n在S_{n+1}中的法向量决定。于是V_n的Ricci张量

$$R_{ij}=e(H_{ih}H_j^h-HH_{ij}),\tag{2}$$

其中$H_j^h=g^{hk}H_{kj}$，而g^{ij}是V_n的第一基本张量g_{ij}的共轭张量；$H=g^{hk}H_{hk}$即行列式方程

$$\det(H_{ij}-\rho g_{ij})=0\tag{3}$$

的n个根$\rho_1,\cdots,\rho_n$之和：

$$H=\sum_{i=1}^n\rho_i.\tag{4}$$

此外，我们记$t=\operatorname{rank}(H_{ij})$为$V_n$的曲面秩数。

又如所知，若黎曼空间$V_n(n\geqslant4)$的共形曲率张量C_{hijk}满足

$$C_{hijk,l}=0,\tag{5}$$

记号“，”表示关于g_{ij}的共变微分，则称V_n为共形对称空间。显然，熟知的共形平坦空间和对称空间都是共形对称空间。以下我们称非共形平坦、非对称的共形对称空间为实质共形对称空间，并记其为CS_n。A. Derdziński和W. Roter证实了CS_n的存在性，他们[2]还证得在CS_n中

$$R_{ih}R_j^h=0,\tag{6}$$

$$R_{hijk,lm}-R_{hijk,ml}=0.\tag{7}$$

其中$R_j^h=g^{hk}R_{kj}$。（7）表明CS_n是半对称空间。

本文讨论一阶共形对称空间。得到

定理 设$V_n(n\geqslant4)$是一阶共形对称空间。则V_n是共形平坦空间或对称空间。

---

* 1982年5月21日收到。

1）本文中若无特别说明，拉丁字母指标h,i,j,k,l,m取值$1,\cdots n$。

先证明一个引理.

引理 设V_n是一阶半对称空间且$t\geqslant 3$. 则

$$H_{ih}H_j^h=\frac{H}{t}H_{ij}. \tag{8}$$

证 利用(7)从(1)可得

$$0=H_{hj}(H_{ik,lm}-H_{ik,ml})+H_{ik}(H_{hj,lm}-H_{hj,ml})$$

$$-H_{hk}(H_{ij,lm}-H_{ij,ml})-H_{ij}(H_{hk,lm}-H_{hk,ml}). \tag{9}$$

在V_n的任一点Q，可选取坐标系，使在Q点有

$$(H_{ij})=\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix} \tag{10}$$

B是以$H_{\mu\nu}(\lambda,\mu,\nu=1,\cdots,t)$为元的非异矩阵. 用方程$\widetilde{H}^{\mu\lambda}H_{\lambda\nu}=\delta_\nu^\mu$可唯一确定$\widetilde{H}^{\mu\nu}$. 对(9)利用$\widetilde{H}^{\mu\nu}$和(10)不难得到$H_{ij,lm}-H_{ij,ml}=\psi_{lm}H_{ij}$，将其代入(9)知$\psi_{lm}=0$，于是$H_{ij,lm}-H_{ij,ml}=0$. 利用Ricci恒等式得

$$H_{ih}R_{jlm}^h+H_{hj}R_{ilm}^h=0. \tag{11}$$

将(1)代入(11)并对结果方程利用$\widetilde{H}^{\mu\nu}$和(10)即得(8).

现在证明定理，只须说明实质共形对称空间不能是一阶的.

设CS_n是S_{n+1}的正常超曲面，即(3)的初等因子为$(\rho-\rho_1),\cdots,(\rho-\rho_n)$. 则在$CS_n$的任一点$Q$，可选取坐标系，使在$Q$点有

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}c_1&&0\\&\ddots&\\0&&c_n\end{pmatrix},\qquad (H_{ij})=\begin{pmatrix}c_1\rho_1&&0\\&\ddots&\\0&&c_n\rho_n\end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中c_i是非0常数. 由(2)利用(12)求得

$$R_{ih}R_j^h=0\qquad(i\neq j),\qquad R_{ih}R_i^h=c_i\rho_i^2(\rho_i-H)^2. \tag{13}$$

比较(6)和(13)得知所有ρ_i均为0或ρ_i中只有一个为H(非0)，其余均为0；在这两种情况下(1)都化为$R_{hijk}=0$，这与CS_n的定义矛盾.

设CS_n为S_{n+1}的非正常超曲面，即(3)的初等因子为$(\rho-\rho_1)^{\alpha_1},\cdots,(\rho-\rho_s)^{\alpha_s}$，$\alpha_p\geqslant 1$ $(p=1,\cdots,s)$，$\sum\limits_{p=1}^{s}\alpha_p=n$，且至少有一个$\alpha_{p_0}\geqslant 2$. 则首先有$t=2$. 因若$t=1$，(1)化为$R_{hijk}=0$；若$t\geqslant 3$，利用(2)和(8)算得$R_{ih}R_j^h=\frac{(1-t)^2H^3}{t^3}H_{ij}$. 因(6)，前式中的$H=0$，进而(2)化为$R_{ij}=0$从而(5)化为$R_{hijk,l}=0$. 按$CS_n$的定义，这两者都是不允许的. 其次，既然$CS_n$的实现曲面非正常且$t=2$，故在$CS_n$的任一点$Q$，可选取坐标系，使在$Q$点只能出现下列三种情况之一(参考[3]，第22章)：

$$(\mathbf{A}_1)\quad (g_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & & & \\ c_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & c_2 & & & \\ & & c_2 & 0 & & & \\ & & & & c_3 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & c_{n-2}\end{pmatrix},\quad (H_{ij})=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & d_2 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$(\mathbf{A}_2)\quad (g_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & \\ c_1 & 0 & & & \\ & & c_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_{n-1}\end{pmatrix},\quad (H_{ij})=\begin{pmatrix} d_1 & c_1\rho_1 & & & \\ c_1\rho_1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$(\mathbf{A}_3)\quad (g_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & & & \\ 0 & c_1 & 0 & & & \\ c_1 & 0 & 0 & & & \\ & & & c_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c_{n-2}\end{pmatrix},\quad (H_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & d_1 & 0 & & & \\ d_1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}. \tag{16}$$

矩阵中未写出的元均为 0；$c_1,\cdots,c_{n-1}$和d_1，d_2都是非零常数。

对$(\mathbf{A}_1)$，利用(14)从(2)求得$R_{ij}=0$；

对$(\mathbf{A}_2)$，利用(15)从(2)求得

$$(R_{ih}R^h_j)=\begin{pmatrix} 2d_1\rho_1(\rho_1-H)(2\rho_1-H) & c_1\rho_1^2(\rho_1-H)^2 & & & \\ c_1\rho_1^2(\rho_1-H)^2 & 0 & & & 0 \\ & & 0 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}.$$

因(4)和(6)，从上式易知$\rho_1=0$，代入(15)第二式得$t=1$。

$(\mathbf{A}_1)$和$(\mathbf{A}_2)$显然均不可能。利用(16)、(1)和(2)求得

$$C_{m121}C^{m323}=\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2 c_1^{-4}d_1^4\neq 0,$$

式中$C^{m323}=g^{mh}g^{3i}g^{2j}g^{3k}C_{hijk}$。于是此$CS_n$是Ricci循环的从而具有基本形式[2)]

$$g_{ij}dx^idx^j=[(AK_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta})x^\alpha x^\beta](dx^1)^2+2dx^1dx^2+K_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{17}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta=3,\cdots,n)$$

其中A是x^1的非常数函数，$(K_{\alpha\beta})$和$(C_{\alpha\beta})$分别是满秩和秩不小于 1 的常元矩阵且$K^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}=0$。这里已记$(K^{\alpha\beta})=(K_{\alpha\beta})^{-1}$。按(17)求得此$CS_n$的黎曼曲率张量非消失分量为

$$R_{1\alpha\beta1}=AK_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta}. \tag{18}$$

2）见[2]定理 6 和注 4。

据(18)和(1)，H_{ij}应满足下列方程：

$$H_{1\alpha}H_{1\beta}-H_{11}H_{\alpha\beta}=e(AK_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta}),\quad H_{1\alpha}H_{\beta\gamma}-H_{1\gamma}H_{\alpha\beta}=0,\quad H_{\alpha\gamma}H_{\beta\delta}-H_{\alpha\delta}H_{\beta\gamma}=0 \tag{19}$$

从(19)第三式知rank$(H_{\alpha\beta})\leqslant 1$。若rank$(H_{\alpha\beta})=0$即$H_{\alpha\beta}=0$，则从(19)第一式立得

$$\det(AK_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta})=0. \tag{20}$$

从(19)第三式知rank$(H_{\alpha\beta})\leqslant 1$。若rank$(H_{\alpha\beta})=0$即$H_{\alpha\beta}=0$，则欲使(19)第一式成立须有$(AK_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta})^2=(AK_{\alpha\alpha}+C_{\alpha\alpha})(AK_{\beta\beta}+C_{\beta\beta})$即

$$K_{\alpha\beta}^2=K_{\alpha\alpha}K_{\beta\beta},\quad 2K_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}=K_{\alpha\alpha}C_{\beta\beta}+K_{\beta\beta}C_{\alpha\alpha},\quad C_{\alpha\beta}^2=C_{\alpha\alpha}C_{\beta\beta}. \tag{21}$$

若rank$(H_{\alpha\beta})=1$，则可记$H_{\alpha\beta}=\sigma H_\alpha H_\beta(\sigma\neq 0)$。这时$H_\alpha$不全为0，不妨设$H_3\neq 0$。在(19)第二式中令$\beta=\gamma=3$得$H_{1\alpha}=H_\alpha H_{13}/H_3$，将其代入(19)第一式，(19)第一式化为$[(H_{13}/H_3)^2-H_{11}]H_\alpha H_\beta=e(AK_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta})$，由此亦得(20)。从(21)第一式和$(K_{\alpha\beta})$非异知$K_{\alpha\alpha}$皆非0从而$K_{\alpha\beta}$皆非0，于是可令$C_{\alpha\beta}/K_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha\beta}$，$C_{\alpha\alpha}/K_{\alpha\alpha}=\lambda_\alpha$，代入(20)从结果方程中易导得$\lambda_\alpha=\lambda_\beta=\lambda_{\alpha\beta}\equiv\lambda\neq 0$，这表明$C_{\alpha\beta}=\lambda K_{\alpha\beta}$。因此$K^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}=\lambda K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}=(n-2)\lambda\neq 0$，但这与$K^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}=0$不符。综上所得，一阶$CS_n$是不存在的。定理至此证毕。

关于一阶共形平坦空间和一阶对称空间，水乃翔等和吴少华、李中林已有专文论及。

从证明中易见本文定理可推广为：

常曲率空间的共形对称超曲面$V_n(n\geqslant 4)$是共形平坦空间或对称空间。

水乃翔同志的意见使定理的证明有所简化，特此致谢。

参 考 文 献

[1] Eisenhart, L. P., Riemannian Geometry, Princeton, 1949.

[2] Derdziński, A. and Roter, W., Some theorems on conformally symmetric manifolds, *Tensar*, *N. S.*, 32 (1978), pp. 11-23.

[3] Bôcher, M., Introduction to Higher Algebra, Macmillan, New York, 1907.

On Conformally Symmetric Spaces of Class One

Wang Yinghua (王英华)

Abstract

The present paper concerns with conformally symmetric spaces of class one, and establish the following theorem.

Theorem. If an n-dimensional ($n\geqslant 4$) conformally symmetric space is of class one, then the space is conformally flat or locally symmetric.