第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

广义 A-proper映射的拓扑度*

闵乐泉

(北京钢铁学院)

本文提出了广义A-proper映射，它更弱于A-proper映射。通过建立广义 A-proper度，可用来研究(M)型映射与部分解答 Browder 问题(见[4]；用类似[6]的方法)。本文推广了[3]、[6]和[2]的工作。

今往设X、Y为实 Banach空间，$D\subset X$是开集。∂D表其边界、$\bar{D}$是之闭包。"$\rightarrow$"和"$\rightharpoonup$"分别表强和弱收敛。N为正整数集合。

一 广义 A-proper 映射和拓扑度㊀

定义 1.1 映射$T:\bar{D}(\subset X)\rightarrow Y$称为$\bar{D}$上关于给定逼近格式$\Gamma=\{(X_n),(Y_n),(P_n),(Q_n)\}$的广义 A-proper 映射⇔对任何$\{n_j\}\subset N$，$n_j\rightarrow\infty$和对应的$\{x_{n_j}|x_{n_j}\in X_{n_j}\}$，有

(i) 若$P_{n_j}x_{n_j}\in\partial D$使得对某个$p\in Y$，$\|Q_{n_j}TP_{n_j}X_{n_j}-Q_{n_j}P\|_{Y_{n_j}}\rightarrow 0$，$n_j\rightarrow\infty$。则$\exists x_0\in\partial D$ $s.t.$ $Tx_0=p$；

(ii) 若$P_{n_j}x_{n_j}\in D$使得对某个$p\in Y$，$\|Q_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}p\|_{Y_{n_j}}$㊁$\rightarrow 0$，$n_j\rightarrow\infty$。则$\exists x_0\in\bar{D}$使得$Tx_0=p$。

定义 1.2 映射$T:\bar{D}(\subset X)\rightarrow Y$称为$\bar{D}$上关于给定逼近格式$\Gamma$的伪A-proper⇔$T$满足上述定义且$\exists$无穷子列$\{x_{n_{j(k)}}\}$使得$x_{n_{j(k)}}\rightharpoonup x_0$。

引理1.1 设$T:\bar{D}(\subset X)\rightarrow Y$是关于$\Gamma$的广义 A-proper。$\forall n\in N$，记$T_n=Q_nTP_n$。若$a\in Y\backslash T(\partial D)$。则$\exists n_0\geqslant 1$，$n_0\in N$和常数$d>0$使得若$D_n=P_n^{-1}(D)$，$n\geqslant n_0$且$x_n\in\partial D_n$，则$\|T_nx_n-Q_na\|\geqslant d$。

定义 1.3 设$T:\bar{D}(\subset X)\rightarrow Y$是fa连续的广义 A-proper 映射(关于$\Gamma$)，$D_n=P_n^{-1}(D)$，$\forall n\in N$为有界集。若$a\in Y\backslash T(\partial D)$。令$Z'=Z\cup\{\pm\infty\}$($Z$是全体整数集合)。则定义$T$关于$\Gamma$在点$a$相对于$D$的拓扑度为

$\deg(T,D,a)=\{\gamma|\gamma\in Z'$，$\exists\{n_j\}\subset N$ 使得 $n_j\rightarrow\infty$，$\deg(T_{n_j},D_{n_j},Q_{n_j},a)\rightarrow\nu\}$，其中$T_{n_j}=Q_{n_j}TP_{n_j}$，$\deg(T_{n_j},D_{n_j},Q_{n_j},a)$是维数相同的定向有限维空间$X_n$、$Y_n$上映射的 Brouwer度。

定理 1.1 设$T:\bar{D}(\subset X)\rightarrow Y$是 fa 连续的关于$\Gamma$的广义 A-proper 映射。$D_n=P_n^{-1}(D)$，

* 本文由1982年9月25日收到的一篇与1983年8月5日收到的一篇合并而成。

㊀为简单起见，简单定理、推论的证明从略。㊁下面省写角标 Y_{n_j}。

$\forall n\in N$是有界集，$a\in Y\backslash T(\partial D)$。则有

(a) $\exists n_0\geqslant 1$，$n_0\in N$ 使得 $n\geqslant n_0\Rightarrow Q_na\notin T_n(\partial D_n)$。故 $n\geqslant n_0\Rightarrow \deg(T_n,D_n,Q_na)\subset Z'$ 非空。

(b) $\deg(T,D,a)\neq\{0\}\Rightarrow\exists x\in D$ 使得 $Tx=a$。

(c) (强同伦不变性)若$T:\bar{D}\times[0,1]\to Y$, $T_n:\bar{D}_n\times[0,1]\to Y_n$连续.且$\forall t\in[0,1]$,$T_t(\cdot)=T(\cdot,t)$依 t 关于$x\in\bar{D}$一致连续。若$\forall t\in[0,1]$，T_t是关于Γ的广义 A-proper 且$\{Q_n\}$在Y的有界子集上等度连续与$a\in Y\backslash T(\partial D\times[0,1])$。则$\deg(T_t,D,a)$与$t\in[0,1]$无关。

(d)(弱同伦不变性)设 $T:\bar{D}\times[0,1]\to Y$, $\forall n\in N$, $T_n=Q_nTP_n:\bar{D}_n\times[0,1]\to Y_n$连续。$\forall t\in[0,1]$，$T_t(\cdot)=T(\cdot,t)$是关于$\Gamma$的广义 A-proper。且若 $\exists\{x_{n_j}\in X_{n_j}\}$。$P_{n_j}x_{n_j}\in\partial D$，$\{t_{n_j}\}\subset[0,1]$使得 $\|Q_{n_j}T(P_{n_j}x_{n_j},t_{n_j})-Q_{n_j}a\|\to 0,n_j\to\infty$，则 $\exists x\in\partial D$，$t\in[0,1]$使得 $T(x,t)=a$。此外再设$a\in Y\backslash T(\partial D\times[0,1])$，则$\deg(T_t,D,a)$与$t\in[0,1]$无关。

(f) 设T是关于Γ的奇映射(即$\forall n\in N$，T_n为从∂D_n到Y_n的奇映射，且D_n在映射 $\pi(x)=-x$ 下不变)。若$\forall n\in N$，$Q_na=0$。则 $\deg(T,D,a)$是奇数集。故 $Tx=a$于D中有解。

证 从广义 A-proper 映射的定义，(a)、(b)、(c)、(f)的证明可仿照[3]定理1的(a)、(b)、(c)、(d)进行。

今证性质(d)：因 $\forall t\in[0,1]$，$a\notin T_t(\partial D)$。由性质(a)知 $\deg(T_t,D,a)$有定义。而 $\deg(Q_nT_tP_n,D_n,Qa)$是 Brouwer 度，故由其同伦不变性，只须证$\exists n_0\geqslant 1$，$n_0\in N$，使得$\forall n\geqslant n_0\Rightarrow Q_na\notin Q_nT_tP_n(\partial D_n)$, $\forall t\in[0,1]$即可。若不真，则 $\exists\{x_{n_j}|x_{n_j}\in X_{n_j}\cap\partial D\}$，$\{t_{n_j}\}\subset[0,1]$，使得 $\|Q_{n_j}T_{t_{n_j}}P_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}a\|=0$，$n_j\to\infty$。因 $P_{n_j}x_{n_j}\in\partial D$，由 T 的假设知 $\exists x\in\partial D$，$t\in[0,1]$使得$T(x,t)=a$。这与$a\notin T(\partial D\times[0,1])$矛盾。 证完

定理 1.2 设 $T_1,T_2:\bar{D}(\subset X)\to Y$均为fa连续的广义 A-proper 映射(关于$\Gamma$)。且 $D_n=P_n^{-1}(D)$，$\forall n\in N$ 为有界开集。$\forall x\in\partial D$，$T_1x=T_2x$。$a\in Y\backslash T_1(\partial D)$ 则 $\deg(T_1,D,a)=\deg(T_2,D,a)$。

证 由[3]引理1和 Brouwer 度的边界值依存性。

定理 1.3 若$T:\bar{D}(\subset X)\to Y$是 fa 连续的关于$\Gamma$的广义 A-proper 映射且$D_n=P_n^{-1}(D)$，$\forall n\in N$为有界开集。设$p(t)$，$t\in[0,1]$是在$Y$中定义的连续曲线，$p([0,1])\subset Y\backslash T(\partial D)$。如$\{Q_n\}$在$Y$的有界子集上等度连续。则$\deg(T,D,p(t))$与$t\in[0,1]$无关。

二 广义 P-紧映射

定义 2.1 设$D\subset X$是有界开集。$T:\bar{D}\to X$ 称为广义 P-紧映射$\Leftrightarrow\forall\lambda\geqslant 0$，$T+\lambda I$是关于投影逼近格式$\Gamma_I$([3])的广义 A-proper 映射。

定理 2.1 若$T:\bar{D}(\subset X)\to X$是有界fa连续的广义 P-紧映射，$0\in D\subset X$ 有界。设 $\forall x\in\partial D$，$\lambda\geqslant 0$有$Tx+\lambda x\neq 0$。则$\deg(T,D,0)=\{1\}$。因此$Tx_0=0$在D中有解。

证 $\forall t\in[0,1]$，$x\in\bar{D}$。定义$H_t(x)=(1-t)Tx+tIx=H(x,t)$。则 $Q_nHP_n:\bar{D}_n\times[0,1]\to X_n$，$\forall n\in N$连续。易知$\forall t\in[0,1]$，$H_t(x)$是广义 A-proper。今证$H$满足定理 1.1(c)。显然 $0\notin H_1(\partial D)$。当 $t\in[0,1)$时，从 $Tx+\left(\frac{t}{1-t}\right)Ix\neq 0$，$\forall x\in\partial D$知 $0\notin H_t(\partial D)$。其次由[3]命题3知$\exists k_0$，$s.t.\ \forall n\in N$有$\|Q_n\|\leqslant k_0$，$\|P_n\|=1$。可见$\{Q_n\}$等度连续。最后从 T 有

界和D有界知$\exists M>0$使得$\max\{\sup_{x\in\bar{D}}\|Tx\|,\sup_{x\in\bar{D}}\|x\|\}<M$。故$H_t(\cdot)$依$t$关于$x\in\bar{D}$一致连续。故$H$满足定理1.1(c)，从而$\deg(T,D,0)=\deg(I,D,0)$。因$I_n=I|_{X_n}$，故Brouwer度$\deg(I_n,D_n,0)=1$，$\forall n\in N$。于是$\deg(I,D,0)=\{1\}$。再由定理1.1(b)，$Tx_0=0$在$D$中有解。证完

推论2.1　若X上具有投影逼近格式Γ_I，则对任何有界开集$D\subset X$：

$$\deg(I,D,p)=\begin{cases}0 & \text{当} p\in X\backslash\bar{D},\\ 1 & \text{当} p\in D.\end{cases}$$

三　广义A-Proper映射举例

命题3.1　设$G\subset X$为闭凸集且$\mathrm{Int}(G)\neq\varnothing$。$D\subset G$是$G$的任意开子集。若$D_n=P_n^{-1}(D)$有界且$\{Q_n\}$为线性映射叙列，$\|Q_n\|\leqslant C_0$，$\forall n\in N$。如$T$、$C$:$G\to Y$，$T$是fa连续关于$\Gamma$的伪A-proper，$C$为全连续算子。则$T+C$是$\bar{D}$上的伪A-proper映射㊀。

证　设$\{x_{n_j}|x_{n_j}\in X_{n_j}\}$，$P_{n_j}x_{n_j}\in\partial D$(或$D$)，使得

$$\|Q_{n_j}(T+C)(P_{n_j}x_{n_j})-Q_{n_j}y\|\to 0,\quad n_j\to\infty.$$

因$\{P_{n_j}x_{n_j}\}$有界而C是紧算子(见[5] I 定理1.7)，故可设$CP_{n_j}x_{n_j}\to y_0\in Y$，$j\to\infty$。故$\|Q_{n_j}CP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}y_0\|\leqslant C_0\|CP_{n_j}x_{n_j}-y_0\|\to 0$，$j\to\infty$。从而$\|Q_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}(y-y_0)\|\to 0$，$n_j\to\infty$。但$T$是伪A-proper，因此可设$P_{n_j}x_{n_j}\rightharpoonup x\in\partial D$(或$\bar{D}$)且$Tx=y-y_0$。依$C$的全连续性知$CP_{n_j}x_{n_j}\to Cx=y_0$。即$(T+C)x=y$。　证完

定理3.1　设G、X、D、$\{Q_n\}$、T、C同命题3.1.此外设$\exists a\in Y\backslash T(\partial D)$，使得$\|Cx\|<\|Tx-a\|$，$\forall x\in\partial D$。则

$$\deg(T,D,a)=\deg(T+C,D,a).$$

证　由命题3.1，定理1.1(c)即得所证。

定义3.1　$T:\bar{D}(\subset X)\to Y$称为关于给定逼近格式$\Gamma=\{(X_n),(Y_n),(P_n),(Q_n)\}$的$p$点广义A-proper映射$\Leftrightarrow p\in Y$且对任何$\{n_j\}\subset N$，$n_j\to\infty$和对应的$\{x_{n_j}|x_{n_j}\in X_{n_j}\}$，有

(i) 若$P_{n_j}x_{n_j}\in\partial D$使得$\|Q_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}p\|_{Y_{n_j}}\to 0$，$n_j\to\infty$。则$\exists x_0\in\partial D$使得$Tx_0=p$。

(ii) 若$P_{n_j}x_{n_j}\in D$使得$\|Q_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}p\|_{Y_{n_j}}\to 0$，$n_j\to\infty$。则$\exists x_0\in\bar{D}$使得$Tx_0=p$。

注记　不难对p点广义A-proper映射建立拓扑度并具有定理1.1至1.3中所述全部性质。

定义3.2　称映射$T:X\to X^*$在点p满足条件(*)$\Leftrightarrow\forall\{x_{n_j}|x_{n_j}\in X_{n_j}\}$与$P_{n_j}x_{n_j}\in\bar{D}$使得$\|Q_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}p\|\to 0$，$n_j\to\infty$，则$\{\|TP_{n_j}x_{n_j}\|\}$关于$n_j$一致有界。

注记　拟有界映射([5]Ⅲ§1.3)必满足条件(*)；周知：$0\in\mathrm{Int}(D(T))$的单调映射必拟有界。

定理3.2　(二中择一)设$T:X\to X^*$是(M)型映射([5]Ⅲ§5.1)，(X,X^*)为实自反可分Banach空间，Γ_0是内射逼近格式([3])。$D\subset X$为有界开集且$\bar{D}$弱闭。如$p\in X^*\backslash T(\partial D)$且$T$在点$p$满足条件(*)(关于$\Gamma_0$)。则或$T$为$p$点广义A-proper，否则方程$Tx=p$在$D$中必有解。

㊀请注意，当X为自反空间时，如C线性，则C紧$\Leftrightarrow$C全连续。

证　若T不是p点广义A-proper映射．则不失一般性可设$\exists\{x_{n_j}|x_{n_j}\in\partial D_{n_j}\}$，$P_{n_j}x_{n_j}\in\partial D$㊀s.t.$\|P^*_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-P^*_{n_j}p\|\to 0$，$n_j\to\infty$．因$T$满足条件(*)，故由定义3.2，$\exists C>0$使得$\|TP_{n_j}x_{n_j}\|=\|Tx_{n_j}\|\leqslant C$，关于$n_j$一致成立．对任何$x_0\in X_n$，$X_n\subset X$．当$n_j\geqslant n$时$x_{n_j}-x_0\in X_{n_j}$．故$n_j\to\infty$时

$$|(Tx_{n_j}-p,\ x_{n_j}-x_0)|\leqslant\|P^*_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-P^*_{n_j}p\|\|x_{n_j}-x_0\|\to 0 \tag{1}$$

因X自反、$\{x_{n_j}\}$有界，不妨设

$$x_{n_j}\rightharpoonup x, \tag{2}$$

由(1)、(2)得$(Tx_{n_j}-p,x_{n_j}-x_0)\to(p,x-x_0)$，$\forall x_0\in X_n$．因$X=\overline{\bigcup_1^\infty X_n}$和$\|Tx_{n_j}\|\leqslant C$．故$(Tx_{n_j},x_{n_j}-x_0)\to(p,x-x_0)$，$\forall x_0\in X$．特别当$x_0=x$时

$$(Tx_{n_j},\ x_{n_j}-x)\to 0. \tag{3}$$

从而$(Tx_{n_j},\ x-x_0)\to(p,\ x-x_0)$，$\forall x_0\in X$，因X自反，所以

$$Tx_{n_j}\rightharpoonup p. \tag{4}$$

由(M)型映射的定义，从(2)、(4)、(3)知$Tx=p$．因$\bar D$弱闭，故$x\in\bar D$．但$p\in X^*\backslash T(\partial D)$，从而$x\in D$．　　证完

注记　周知极大单调、伪单调和fa连续的广义伪单调映射及有界线性映射均为(M)型映射([5])．

定理3.3　$T:X\to X^*$是(M)型映射，(X,X^*)为自反可分Banach空间，Γ_0是内射逼近格式．若$\bar B(0,R)\subset X$是以$0\in X$为心，R为半径的闭球且$0\in X^*\backslash T(\partial B(0,R))$，$T$在$\partial B(0,R)$上是奇映射．如$T$在点$0\in X$满足条件(*)，则$Tx=0$在$B(0,R)$中有解．

证　由定理3.2和定理1.1(f)即得所证．

四　满射性定理和Browder问题

本节设(X,X^*)是实可分自反Banach空间．X满足条件(h)(见[6])，X^*严格凸．因此具有内射逼近格式Γ_0．$D(\subset X)$为有界开集．$G_A(\bar D)$表从$\bar D$到X^*的fa连续广义A-proper映射全体之集合．

引理4.1　设$J:X\to X^*$是正规对偶映射，$0\in D$关于原点对称．则$\forall k>0$有$\deg(kJ,D,0)\neq\{0\}$．

证　由[2]定理4.2知J是拟-A-proper．故$\forall k>1$，kJ是A-proper．可见$kJ\in G_A(\bar D)$，显见数乘不变映射的广义A-proper性．从而$\forall k>0$，$kJ\in G_A(\bar D)$．但kJ是奇映射，故由定理1.1(f)即得所证．

引理4.2　设$T_t(\cdot)=T(\cdot,t)$：$\bar D\times[0,1]\to X^*$．$\forall n\in N$，$(T_t)_n=Q_nT_tP_n$：$\bar D_n\times[0,1]\to X_n$连续．$\forall t\in[0,1]$，$T_t\in G_A(\bar D)$．$p\in X^*\backslash T(\partial D\times[0,1])$且$\exists$整数$n_0\geqslant 1$，使得$n\geqslant n_0$时$Q_np\in X^*\backslash Q_nT(\partial D_n\times[0,1])$，则$\deg(T_t,D,p)$与$t\in[0,1]$无关．

㊀因$x_{n_j}\in X_{n_j}$且$P_{n_j}x_{n_j}\in\partial D$，故由内射$P_{n_j}$的性质可知$x_{n_j}\in\partial D_{n_j}\subset\partial D$．而对于$x_{n_j}\in D_{n_j}$的情形可同样证明，故从略．

证　因$n\geqslant n_0$时，$Q_n p\in X^*\backslash Q_nT(\partial D_n\times[0,\ 1])$。故由 Brouwer 度的同伦不变性即得所证。

定理 4.1　设$T:\bar{D}\to X^*$，$0\in\bar{D}$关于原点对称且弱闭。如$\forall\lambda>0$，$T+\lambda J\in G_A(\bar{D})$，且满足

(i) $(Tx,x)>0$，$\forall x\in\partial D$；

(ii) $x_n\rightharpoonup x$，$Tx_n\to f\Rightarrow Tx=f$。

则$Tx=0$于$x\in D$有解。

证　因J是广义 A-proper，故$\forall t\in[0,1]$，$m\in N$，$T_t=tT+\left(1-t+\frac{1}{m}\right)J\in G_A(\bar{D})$。其次$\exists$常数$C>0$使得$\inf\limits_{x\in\partial D}\|x\|\geqslant C$。

最后$\forall t\in[0,1]$，$\forall x\in\partial D$和$x_n\in\partial D_n$有

$$\|T_tx\|\|x\|\geqslant(T_tx,x)>\frac{1}{m}\|x\|^2\geqslant\frac{1}{m}C^2>0;$$

$$\|Q_nT_tx_n\|\|x_n\|\geqslant(Q_nT_tx_n,P_nx_n)=(T_tx_n,x_n)>\frac{1}{m}C^2.$$

由引理 4.1，4.2知$\deg\left(T+\frac{1}{m}J,D,\ 0\right)=\deg\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)J,D,0\right)\neq\{0\}$。因此从定理1.1，$\forall m\in N$，$\left(T+\frac{1}{m}J\right)x_m=0$于$x_m\in D$有解。不妨设$x_m\rightharpoonup x\in\bar{D}$，另一方面$\|Tx_m\|=\frac{1}{m}\|Jx_m\|\to0$，依(ii)得$Tx=0$，由(i)知$x\in D$。

定理 4.2　设$T:\bar{D}\to X^*$，$0\in\bar{D}$关于原点对称。且$\forall\lambda\geqslant0$，$T+\lambda J\in G_A(\bar{D})$。若还满足：$(Tx,x)>0$，$\forall x\in\partial D$。则$Tx=0$于$x\in D$有解。

定理 4.3　设$B(0,r)\subseteq D$，且$\forall\lambda>0$，$(T+\lambda J)\in G_A(\bar{D})\cap G_A(\overline{B(0,t)})$且满足

(i) $\exists$常数$C>0$和$C>\|f\|$使得$(Tx,x)\geqslant C\|x\|$，$\forall x\in\partial B(0,r)$；

(ii) $x_n\rightharpoonup x$，$Tx_n\to f\Rightarrow Tx=f$。

则$Tx=f$于$x\in B(0,r)$有解。

定理 4.4　设$B(0,r)\subseteq D$且$\forall\lambda\geqslant0$，$(T+\lambda J)\in G_A(\bar{D})\cap G_A(\overline{B(0,r)})$。若$\exists$常数$C>0$和$C>\|f\|$使得$(Tx,x)\geqslant C\|x\|$，$\forall x\in\partial B(0,r)$。则$Tx=f$于$x\in B(0,r)$有解。

定理4.3和4.4的证明　令$T_fx=Tx-f$。则$\forall x\in\partial B(0,r)$，$(T_fx,x)\geqslant(C-\|f\|)\|x\|>0$。即得所证。

推论 4.1　设$\forall r>0$，$\lambda>0$，$(T+\lambda J)\in G_A(\overline{B(0,r)})$。$x_n\rightharpoonup x$，$Tx_n\to f\Rightarrow Tx=f$。若$T$强制，则$T$满射。

推论 4.2　设$\forall r>0$，$\lambda\geqslant0$，$(T+\lambda J)\in G_A(\overline{B(0,r)})$。若$T$强制，则$T$满射。

定义 4.1(仿照[1])　设$T,P:X\to X^*$，其中T是极大单调映射。称P为T-弱单调映射，若

(i) P拟有界 fa 连续；

(ii) $x_n\rightharpoonup x$，$Px_n\rightharpoonup f$，$\{\|Tx_n\|\}$有界$\Rightarrow\overline{\lim}(Px_n,x_n-x)\geqslant0$。当$\overline{\lim}(Px_n,x_n-x)=0$时$Px=f$。

定理 4.5 设$T, P: X \to X^*$，其中T为极大单调映射，P是T-弱单调映射。如$(T+P)$强制，则$(T+P)$满射。

证 用类似[6]引理4的方法证明$T+P$满足：$x_n \rightharpoonup x$，$(T+P) \to p \Rightarrow (T+P)x = p$。因此由[2]定理4.1和本文推论4.1，只须证$(T+P)$是弱单调型映射(见[2]定义4.1)即可。实际上，若$x_n \rightharpoonup x$，$(T+P)x_n \rightharpoonup p$，由[6]引理1知$\{\|Tx_n\|\}$，$\{\|Px_n\|\}$均有界。不妨设：$Px_n \rightharpoonup f$，故

$$\overline{\lim_n}((T+P)x_n, x_n - x) = \overline{\lim_n}[(Tx_n - Tx, x_n - x) + (Px_n, x_n - x)]$$

$$\geqslant \overline{\lim_n}(Px_n, x_n - x) \geqslant 0. \qquad (*)$$

另一方面，若$x_n \to x$，$(T+P)x_n \rightharpoonup p$，由$(*)$推出

$$0 = \lim_n (Tx_n + Px_n, x_n - x) \geqslant \overline{\lim_n}(Px_n, x_n - x),$$

故$\overline{\lim_n}(Px_n, x_n - x) = 0$且$Px = f$。可见$Tx_n \rightharpoonup p - f$。由极大单调映射$T$之图$G(T)$的次闭性知$Tx = p - f$。即$(T+Px) = p$。所以$T+P$是弱单调型映射。 证完

注记 显见T-伪单调映射必为T-弱单调映射。因此定理4.5在较弱的条件下部分肯定回答了Browder提出的问题。

致谢 衷心感谢我的导师赵义纯教授。

参考文献

[1] 赵义纯，科学通报，15(1983)，pp902—904.

[2] 闵乐泉，数学研究与评论，4(1983)，pp31—39.

[3] Browder, F. E. and Petryshyn, W. V., *J. Funct. Anal.*, 3(1969), pp217—245.

[4] Browder, F. E., Mathematical Developments arising from Hilbert problems, vol. 1 (1976), pp68—73. A. M. S.

[5] Pascali, D. and Sburlan, S., Nonlinear mappings of monotone type, Bucuresti, Editura Academiei, 1978.

[6] Zhao Yichun(赵义纯), *Chin. Ann. of Math., Ser.* 4B(2)(1983).pp241—253.

A Topological Degree for Generalized A-Proper Mappings

Min Lequan

(Bejing University of Iron and Steel Technology)

Abstract

In this paper, a class of mappings-generalized A-proper mappings is introduced and a topological degree for it is established. The properties of the topological degree are same as for A-proper mappings. The concepts of "p point generalized A-proper mappings and degree" are introduced. By the alternating theorem for mappings of (M) types in this paper, mappings of (M) types might be directly studied by using topological degree for generalized A-proper.

On the other hand, if let X and X^* be a pair of real separable reflexive Banach space. Suppose that X has the property (h) (cf[6]) and X^* is strictly convex. We introduce following

Definition Let P, T: $X \to X^*$, T be a maximal monotone mapping. P is called a T-weak monotone mapping if it satisfies

(i) P is a quasi-bounded and fa continuous mapping

(ii) Suppose that $x_n \rightharpoonup x$, $Px_n \rightharpoonup f$ and $\{\|Tx_n\|\}$ is a bounded sequence. Then $\overline{\lim_n} (Px_n, x_n - x) \geqslant 0$; in particular, $\overline{\lim_n} (Px_n, x_n - x) = 0$ implies that $Px = f$.

Obviously, if it is T-pseudomonotone, P must be T-weak monotone. This paper uses the topological degree for generalized A-proper mappings to show some solvability and surjecty theorems about this class mappings. The following Theorem, in weaker sense, gives a partially affirmative answer to a Browder's question (cf.[4])

Theoerm Let T, P: $X \to X^*$, where T is a maximal monotone mapping and P is a T-weak monotone mapping. If $(T+P)$ is coercive, i.e., $\lim_{\|x\| \to \infty} ((T+P)x, x)/\|x\| = +\infty$. Then $T+P$ is surjective.