第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

关于 Liénard 方程零解的全局稳定性*

李曾淑　　王慕秋

（延边大学）　　（中国科学院数学所）

对于 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0,\quad g(0)=0 \tag{1}$$

或等价系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y\end{cases} \tag{2}$$

的零解全局稳定性的研究，文[1]中曾分别对 $g(x)$ 和 $f(x)$ 加不同的条件得到下面两个结果(即文[1]中的例3和例4)。

例 1 对于方程(1)假设

(i) $xg(x)>0$，对所有 $x\neq 0$

(ii) $f(x)>0$，对所有 $x\neq 0$

(iii) $G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi\to\infty$ 当 $|x|\to\infty$。

则系统(2)的零解是全局稳定的。

如果减弱加在 $g(x)$ 上的条件，而加强加在阻尼 $f(x)$ 上的条件，则有如下结果。

例 2 对于方程(1)假设

(i) $xg(x)>0$，对所有 $x\neq 0$

(ii) $f(x)>0$，对所有 $x\neq 0$

(iii) $|F(x)|=\left|\int_0^x f(\xi)d\xi\right|\to\infty$ 当 $|x|\to\infty$。

则系统(2)的零解是全局稳定的。

本文也来研究 Liénard 方程(1)的零解的全局稳定性(方程(1)中假设 $f(x)$，$g(x)$ 是连续可微函数)。本文所得的结果与文[1]中的例4中所得结果相比较不仅减弱了条件，并且证明更简明。我们开始证明之前先，先介绍将在证明中所用到的定理。

考虑系统

*1982年6月14日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1,\cdots,x_n)\quad(s=1,\cdots,n),\tag{*}$$

假设方程的右端 $X_s(x_1,\cdots,x_n)$在全相空间内连续且满足李普希兹条件；$X_s(0,\cdots,0)=0$，且坐标原点 $O(0,\cdots,0)$是系统(*)的唯一平衡点。

定理 1[2] 如果存在正定可微函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$，使得

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(x_1,\cdots,x_n)$$

在整个相空间是常负的，且集合 $\dot V=0$ 上除零解外，不包含系统(*)的整条轨线，并且系统(*)的所有正半轨线都是有界的，则系统(*)的零解是全局稳定的。

现在来研究方程(1)的零解的全局稳定性，我们经过 Liénard 变换

$$y=\dot x+\int_0^x f(x)dx$$

后，方程(1)化为

$$\begin{cases}\dot x=y-F(x)\\ \dot y=-g(x),\end{cases}\tag{3}$$

其中 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$，记 $G(x)=\int_0^x g(x)dx$，我们得到下面的结果，不妨写成定理形式

定理 如果方程(1)中的 $f(x)$，$g(x)$ 满足下列条件

(a) $xg(x)>0$，当 $x\neq 0$ 时

(b) $x\int_0^x f(x)dx>0$，当 $x\neq 0$ 时

(c) $\lim\limits_{|x|\to\infty}|F(x)|=+\infty$,

则系统(3)的零解是全局稳定的。

证 对系统(3)作 Ляпунов 函数

$$V=\frac{1}{2}y^2+G(x)$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3)}=y\frac{dy}{dt}+g(x)\frac{dx}{dt}=y(-g(x))+g(x)(y-F(x))=-g(x)F(x)$$

由条件(a)得知 V 正定，由(a)及(b)得 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3)}\leqslant 0$，显然 $\dot V=0$ 上除平衡位置外，不包含系统(3)的整条轨线，这是因为，当 $x=0$ 时 $\dot V=0$，由系统(3)的第一式推出 $y=0$。

下面我们证明系统(3)的每个解都是有界的，为此考虑由

$$V(x,y)<l\ 及\ |x|<N$$

所确定的区域 Ω，显然区域 Ω 是有界的，对任意点 $P(x_0,y_0)$而言，总可以选择 l，N 如此大，使 $P(x_0,y_0)$位于 Ω 内，且当 t 增加时通过 $P(x_0,y_0)$的积分曲线不能离开区域 Ω。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由于$\dot{V}\leqslant 0$，故能不能越过$V=l$，即轨线如要离开Ω，必须经过Ω的环界部分$x=N$或$x=-N$。由$V<l$得$y^2<2l$，故有$-\sqrt{2l}<y<\sqrt{2l}$，由系统(3)的第一式$\dot{x}=y-F(x)$得

$$\dot{x}<\sqrt{2l}-F(x),\quad \dot{x}>-\sqrt{2l}-F(x),$$

由条件(c)，存在N，使得

$$\sqrt{2l}-F(N)<0,\quad -\sqrt{2l}-F(-N)>0,$$

即

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=N}<0,\qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=-N}>0.$$

这样一来，就有开始于Ω内的解往后总不能离开区域Ω，即证明了解的有界性〔看图1〕。

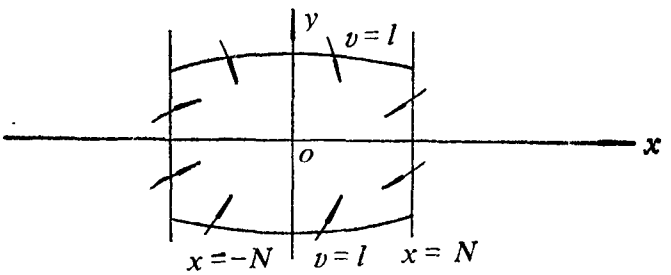

图 1

由定理1，得出系统(3)的零解是全局稳定的。证毕。

下面我们与例2条件进行比较，例2中要求

$$f(x)>0\qquad \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}\qquad (A)$$

而我们只要求

$$x\int_0^x f(x)\,dx>0\qquad \text{当}x\neq 0\text{时}\qquad (B)$$

显然条件(B)比条件(A)要宽。

例 3　考虑$f(x)=a+\cos x$，$0<a<1$；$xg(x)>0$当$x\neq 0$时。

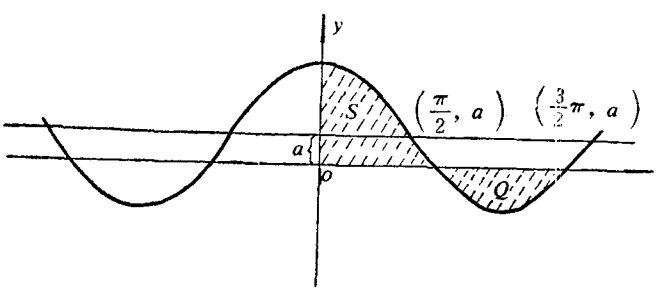

图 2

我们选取a，使得面积$S>$面积Q，这样选定a后，$f(x)=a+\cos x$可以取负值，所以不满足条件(A)，即不满足例2中所述的条件，故不能判断系统(2)的零解的全局稳定性，但

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

总有

$$xF(x)>0$$

故上面所述定理的条件满足。由此得出系统零解的全局稳定性的结论。

参 考 文 献

[1] Lasalle, J. and Lefschetz, S., Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York, 1961.p.67—70.

[2] 秦元勋、王慕秋、王联，运动稳定性理论与应用，科学出版社，1981，25—27。

On Global Asymptotic Stability of the Trivial Solution of Liénard's Equation

Li Zenshu (李曾淑) *Wang Muqiu* (王慕秋)

(*Yanbian University*) (*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

We consider global asymptotic stability of the trivial solution of Liénard's equation

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0,\quad g(0)=0. \tag{1}$$

Instead of (1) we will discuss the equivalent system

$$\begin{cases}\dot{x}=y-\int_0^x f(x)\,dx,\\ \dot{y}=-g(x).\end{cases} \tag{2}$$

We obtain the following result

Theorem The trivial solution of system (2) is globally asymptotically stable if $f(x)$ and $g(x)$ satisfy the following conditions

a) $xg(x)>0$ for all $x\neq 0$,

b) $x\int_0^x f(x)\,dx>0$ for all $x\neq 0$,

c) $|F(x)|=\left|\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right|\to\infty$ as $|x|\to\infty$.

In comparison with example 2[1, ex.4], we obtain result with a weaker assumption on $f(x)$ and a simpler proof.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.