第5卷 第3期 1985年7月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.3 July, 1985

仿 S-闭空间*

陈必胜

（苏州大学）

§1 引言

自从1976年 **Thompson**〔1〕引进 S-闭空间的概念以来，引起了人们的兴趣。王国俊[2]—[3]和其他一些文献（如[4]—[9]）进一步讨论了 S-闭空间的性质，得到了许多有意义的结果。近来，**Zahid** 仿照从紧性到仿紧性的推广在[10]中引进仿 H-闭空间作为 H-闭空间的推广。受该文的启发，本文引进仿 S-闭空间以推广 S-闭空间，并讨论它的一些性质。对许多关于 S-闭空间的已知命题，可以建立或推广得到仿 S-闭空间的相应命题。

§2 予备知识

先介绍本文中常用的几个概念和记号。

空间 X 的子集 A 称为半开集，如果存在开集 U 使 $A\subseteq U\subseteq\overline{A}$；$A$ 称为正则闭集，如果存在开集 U 使 $A=\overline{U}$；A 称为正则开集，如果存在闭集 F 使 $A=\mathring{F}$。设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha|\alpha\in A\}$ 是空间 X 的子集族，我们记 $\mathscr{U}^*=\cup\{U_\alpha|\alpha\in A\}$，$\overline{\mathscr{U}}=\{\overline{U}_\alpha|\alpha\in A\}$。

空间 X 称为 S-闭的([1])，如果 X 的每一半开复盖 $\mathscr{U}$ 有有限子族 $\mathscr{V}$ 使 $\overline{\mathscr{V}}^*$ 在 X 中稠密。[2]的定理1证明，空间 X 是 S-闭空间当且仅当 X 的每一正则闭复盖有有限子复盖。**Hausdorff**空间 X 称为 H-闭的，如果 X 的每一开复盖 $\mathscr{U}$ 有有限子族 $\mathscr{V}$ 使 $\mathscr{V}^*$ 在 X 中稠密；**Hausdorff** 空间 X 称为仿 H-闭的，如果 X 的每一开复盖 $\mathscr{U}$ 有局部有限的加细开集族 $\mathscr{V}$（不必要复盖 X）使 $\mathscr{V}^*$ 在 X 中稠密（看[10]）。空间 X 称为仿紧的，如果 X 的每一开复盖有局部有限的加细开复盖。空间 X 称为极不连通的，如果 X 中每一开集的闭包是开集，或等价地，如果 X 中每一正则闭(开)集是既开又闭的（看[2]）。

在本文中，除特别声明的外，对空间 X 不要求任何分离公理，正则空间也不要求是 T_1 的。

§3 仿 S-闭空间的定义和特征

定义1 空间 X 称为仿 S-闭的，如果 X 的每一半开复盖 $\mathscr{U}$ 有局部有限的加细半开集族 $\mathscr{V}$（不必要复盖 X）使 $\overline{\mathscr{V}}^*$ 在 X 中稠密。

*1984年4月18日收到。

显然，每个S-闭空间是仿S-闭的，但反之不然，含有无限多个点的离散空间是仿S-闭的，但不是S-闭的。

定理1 对于空间X，下列论断等价：

(i) X是仿S-闭的；

(ii) X的每一半开复盖$\mathscr{U}$有局部有限的加细开集族$\mathscr{G}$（不必要复盖X）使$\mathscr{G}^*$在X中稠密；

(iii) X的每一正则闭复盖$\mathscr{F}$有局部有限的加细正则闭复盖$\mathscr{H}$。

证明 (i)⇒(ii)：任取X的半开复盖$\mathscr{U}$。由(i)，$\mathscr{U}$有局部有限的加细半开集族$\mathscr{V}=\{V_\beta|\beta\in B\}$使$\mathscr{V}^*$在$X$中稠密。$\forall\beta\in B$，存在开集$G_\beta$使$G_\beta\subseteq V_\beta\subseteq\bar{G}_\beta$。置$\mathscr{G}=\{G_\beta|\beta\in B\}$。易知$\mathscr{G}$是$X$中局部有限开集族，加细$\mathscr{U}$，且$\mathscr{G}^*$也在$X$中稠密。

(ii)⇒(iii)：任取X的正则闭复盖$\mathscr{F}$。$\mathscr{F}$也是X的半开复盖，由(ii)，$\mathscr{F}$有局部有限的加细开集族$\mathscr{G}$使$\mathscr{G}^*$在X中稠密。置$\mathscr{H}=\bar{\mathscr{G}}$。显然，$\mathscr{H}$是$X$的正则闭复盖。不难看出，$\mathscr{H}$也在$X$中局部有限，且$\mathscr{H}$仿加细$\mathscr{F}$。

(iii)⇒(i)：任取X的半开复盖$\mathscr{U}=\{U_\alpha|\alpha\in A\}$。$\forall\alpha\in A$，存在开集$O_\alpha$使$O_\alpha\subseteq U_\alpha\subseteq\bar{O}_\alpha$。置$\mathscr{G}=\{\bar{O}_\alpha|\alpha\in A\}$。$\mathscr{G}$是$X$的正则闭复盖，由(iii)，$\mathscr{G}$有局部有限的加细正则闭复盖$\mathscr{H}=\{H_\beta|\beta\in B\}$。$\forall\beta\in B$，存在开集$V_\beta$和存在$\alpha(\beta)\in A$使$H_\beta=\bar{V}_\beta\subseteq\bar{O}_{\alpha(\beta)}$。$\forall\beta\in B$，置$W_\beta=O_{\alpha(\beta)}\cap\bar{V}_\beta$，由于$O_{\alpha(\beta)}$与$V_\beta$都是开集，不难证明$W_\beta$是$X$中半开集，且有$W_\beta\subseteq O_{\alpha(\beta)}\subseteq V_{\alpha(\beta)}$及$\bar{W}_\beta=\bar{V}_\beta=H_\beta$。这样，$\mathscr{W}=\{W_\beta|\beta\in B\}$是$X$中局部有限的半开集族，加细$\mathscr{U}$，且$\mathscr{W}^*$在$X$中稠密。所以，$X$是仿$S$-闭的。 ▌

由定理1即得：

推论1 Hausdorff的仿S-闭空间是仿H-闭空间。 ▌

空间X称为feebly-紧的，如果X中每一局部有限开集族是有限的（看[10]）。由定理1又可推得：

推论2 仿S-闭的feebly-紧空间是S-闭空间。 ▌

§4 Hausdorff的仿S-闭空间的性质

定理2 设Hausdorff空间X是极不连通的，则X是仿S-闭的当且仅当X是仿H-闭的。

证明 必要性由定理1的推论1即得。现证充分性。任取X的正则闭复盖$\mathscr{V}$，由极不连通性，$\mathscr{V}$也是X的开复盖，再由仿H-闭性，$\mathscr{V}$有局部有限的加细开集族$\mathscr{G}$使$\mathscr{G}^*$在X中稠密。这样$\bar{\mathscr{G}}$是X的正则闭复盖，易知$\bar{\mathscr{G}}$也在X中局部有限，且$\bar{\mathscr{G}}$仿加细$\mathscr{V}$。因此，由定理1，X是仿S-闭的。 ▌

从定理2的充分性证明可知有

推论 极不连通的仿紧空间是仿S-闭的。 ▌

空间X称为$T_{1\frac{1}{2}}$-空间([3]；在[2]中称为T_1^*-空间，在[6]—[7]中称为弱Hausdorff空间)，如果$\forall a,\ b\in X$，$a\neq b$，a有正则开邻域不包含b，或等价地，如果$\forall a\in X$，$\{a\}$是某些正则闭集的并。易知，Hausdorff⇒$T_{1\frac{1}{2}}$⇒T_1。

定理 3　$T_{1\frac{1}{2}}$的仿S-闭空间X是极不连通的。

证明　任取X中正则闭集P。任取$a\in P$。对$\forall b\in X-P$，由$T_{1\frac{1}{2}}$-性，存在a的正则开邻域U_b使$b\notin U_b$。置$\mathscr{V}=\{X-U_b|b\in X-P\}\cup\{P\}$，它是$X$的正则闭复盖，由仿$S$-闭性及定理 1，$\mathscr{V}$有局部有限的加细正则闭复盖$\mathscr{F}=\{F_\beta|\beta\in B\}$。置$E=\cup\{F_\beta\in\mathscr{F}|F_\beta\subseteq P\}$，$F=\cup\{F_\beta\in\mathscr{F}|F_\beta\subseteq$某个$X-U_b\}$。因为$\mathscr{F}$是局部有限闭集族，$E$和$F$是闭集；因为$\mathscr{F}$复盖$X$且加细$\mathscr{V}$，$E\cup F=X$。容易看出，开集$O=X-F$满足$a\in O\subseteq E\subseteq P$。从而$P$是开集。所以由[2]的命题 3，$X$是极不连通的。 ▌

推论1　([2]定理 3)。$T_{1\frac{1}{2}}$的S-闭空间是极不连通的。 ▌

推论2　Hausdorff 的仿S-闭空间是极不连通的。 ▌

由定理 1 的推论 1 、定理 3 的推论 2 和定理 2 即得：

定理4　Hausdorff 空间X是仿S-闭的当且仅当X是极不连通的仿H-闭空间。 ▌

§5　正则仿 S-闭空间的性质

空间X称为P_Σ-型的([2])，如果X中每个开集可表示为正则闭集的并。X称为几乎正则的(看[5])，如果$\forall x\in X$及每一不包含x的正则闭集F，存在不相交开集U与V使$x\in U$，$F\subseteq V$，或等价地，如果对$\forall x\in X$，及x的每一正则开邻域G，存在开集H使$x\in H\subseteq\bar{H}\subseteq G$。易知，正则$\Rightarrow P_\Sigma$-型，正则$\Rightarrow$几乎正则。

定理5　P_Σ-型的仿S-闭空间X是仿紧空间。

证明　设$\mathscr{U}$是X的任一开复盖。因X是P_Σ-型的，$\mathscr{U}$中每一元素是某些正则闭集的并，这样得到X的正则闭复盖$\mathscr{F}$。显然$\mathscr{F}$加细$\mathscr{U}$。因X是仿S-闭的，由定理 1，$\mathscr{F}$有局部有限的加细正则闭复盖$\mathscr{V}$。由于$\mathscr{V}$也是$\mathscr{U}$的加细闭复盖，因此由[11]的引理1(c)到(a)的证明知X是仿紧空间。 ▌

推论　正则仿S-闭空间是仿紧空间。 ▌

定理6　仿S-闭空间X是极不连通的当且仅当它满足条件(*)：“X中每一正则开集是某些正则闭集的併”。

证明　必要性显然。下证充分性：任取X中正则开集Q，由(*)，Q是一族正则闭集$\mathscr{F}=\{F_\alpha|\alpha\in A\}$的併。置$\tilde{\mathscr{F}}=\mathscr{F}\cup\{X-Q\}$，它是$X$的正则闭复盖。由仿$S$-闭性和定理 1，$\tilde{\mathscr{F}}$有局部有限的加细正则闭复盖$\mathscr{G}=\{G_\beta|\beta\in B\}$。置$\mathscr{G}_1=\{G_\beta\in\mathscr{G}|\exists\alpha\in A$使$G_\beta\subseteq F_\alpha\}$。因为每一$F_\alpha\subseteq Q$，$\mathscr{G}_1^*\subseteq Q$；又因为$\mathscr{G}$复盖$X$，$\forall x\in Q$，$\exists\beta(x)\in B$使$x\in G_{\beta(x)}$，此$G_{\beta(x)}$不能包含在$X-Q$内，故$G_{\beta(x)}\in\mathscr{G}_1$，从而$x\in\mathscr{G}_1^*$，这样$Q\subseteq\mathscr{G}_1^*$。因此，$\mathscr{G}_1^*=Q$。由于$\mathscr{G}$是局部有限闭集族，$Q$是闭集。由[2]的命题 3，$X$是极不连通的。 ▌

易知P_Σ-型空间与几乎正则空间都满足条件(*)，故有：

推论1　P_Σ-型的仿S-闭空间是极不连通的。 ▌

推论2　几乎正则的仿S-闭空间是极不连通的。 ▌

推论3　正则仿S-闭空间是极不连通的。 ▌

它们分别推广了[2]的定理6、[6]的定理3.5和[1]的定理6。

定理7　为使正则T_1空间X是仿S-闭的，必须只须X是极不连通的仿紧空间。

证明　必要性：由定理5的推论和定理6的推论3即可推得。

充分性：设正则T_1空间X是仿紧的，于是它是仿H-闭的，再由定理1的推论1，X是仿S-闭的。 ▮

§6　仿S-闭空间的半正则化

设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间，易知$(X,\mathscr{T})$中全体正则开集组成的集族$\mathscr{B}$,构成了X上另一个拓扑$\mathscr{T}_*$的基，称空间$(X,\mathscr{T}_*)$为空间$(X,\mathscr{T})$的半正则化。显然，$\mathscr{T}_*\subseteq\mathscr{T}$。讨论空间$(X,\mathscr{T})$与其半正则化$(X,\mathscr{T}_*)$之间的关系，是一个有兴趣的课题。[2]的定理8证明，$(X,\mathscr{T})$是S-闭的当且仅当$(X,\mathscr{T}_*)$是S-闭的。对于仿S-闭空间，可以证明相应的定理，作为予备，我们先证明下列两个命题。

命题1　设$\mathscr{G}=\{G_\beta|\beta\in B\}$是空间$X$中的局部有限正则闭集族，则有：

(i)　$\mathscr{G}^*$是X中正则闭集。

(ii)　$\forall x\in X$，存在点x的正则开邻域U，使U仅与$\mathscr{G}$中有限多个元素相交。

证明　(i)：因为$\forall\beta\in B$，存在开集V_β使$G_\beta=\overline{V}_\beta$，由$\mathscr{G}$的局部有限性即知，$\mathscr{G}^*=\cup\{\overline{V}_\beta|\beta\in B\}=\overline{\cup\{V_\beta|\beta\in B\}}$是正则闭集。

(ii)：任取$x\in X$。由$\mathscr{G}$的局部有限性，存在x的开邻域O仅与$\mathscr{G}$中有限多个元素相交。置$\mathscr{G}_1=\{G_\beta\in\mathscr{G}|G_\beta\cap O=\varnothing\}$，由已证得的(i)，$\mathscr{G}_1^*$也是正则闭集，且易知$\mathscr{G}_1^*\cap O=\varnothing$。这样$U=X-\mathscr{G}_1^*$是正则开集，满足$x\in O\subseteq U$。由于易知$G_\beta\cap O=\varnothing$当且仅当$G_\beta\cap U=\varnothing$，因此，点$x$的正则开邻域$U$也仅与$\mathscr{G}$中至多有限多个元素相交。 ▮

由命题1与[2]的命题2即得：

命题2　$\mathscr{G}$是空间$(X,\mathscr{T})$中的局部有限正则闭集族，当且仅当$\mathscr{G}$是$(X,\mathscr{T}_*)$中的局部有限正则闭集族。 ▮

定理8　空间$(X,\mathscr{T})$是仿S-闭的当且仅当它的半正则化$(X,\mathscr{T}_*)$是仿S-闭的。

证明　由[2]的命题2以及本文定理1和命题2即得。 ▮

此外，与[2]的定理9、10和11的证明类似，我们还可以证明：

定理9　仿S-闭的Hausdorff空间的半正则化是仿S-闭的极不连通的正则T_1仿紧空间。▮

定理10　仿S-闭的极小Hausdorff空间是仿紧空间。 ▮

定理11　若仿S-闭的Hausdorff空间X满足第一可数性公理，则它是离散空间。 ▮

§7　仿S-闭空间的一个和定理

Cameron[5]证明，若空间X可以写为有限个S-闭的既开又闭子集的併，则X是S-闭空间。对于仿S-闭空间，我们有：

定理12　设$\mathscr{G}=\{Y_\alpha|\alpha\in A\}$是空间$X$的局部有限复盖，并设$\forall\alpha\in A$，$Y_\alpha$是$X$中既开又闭子集，且$Y_\alpha$是$X$的仿$S$-闭子空间，则$X$是仿$S$-闭空间。

证明　设$\mathscr{F}=\{F_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$是空间$X$的任一正则闭复盖。

任取$\alpha\in A$。因Y_α是X中开集，易知$\mathscr{F}_\alpha=\{F_\gamma\cap Y_\alpha|\gamma\in\Gamma\}$是$Y_\alpha$的相对正则闭复盖。由$Y_\alpha$的仿$S$-闭性，存在$Y_\alpha$的相对正则闭复盖$\mathscr{H}_\alpha$加细$\mathscr{F}_\alpha$，且$\mathscr{H}_\alpha$在$Y_\alpha$中是局部有限的。由于

Y_α是X中既开又闭子集，易证$\mathscr{H}_\alpha$也是X中正则闭集族。下面证$\mathscr{H}_\alpha$在X中也是局部有限的：$\forall x\in X$，若$x\in Y_\alpha$，则因$\mathscr{H}_\alpha$在Y_α中局部有限，存在x在Y_α中的开邻域V仅与$\mathscr{H}_\alpha$中有限多个元素相交，由于Y_α是X中开集，V也是x在X中开邻域；若$x\notin Y_\alpha$，置$V=X-\bigcup\{Y_\beta\in\mathscr{G}|x\notin Y_\beta\}$，由于$\mathscr{G}$是局部有限闭复盖，$V$是$x$在$X$中开邻域，由于$V\cap Y_\alpha=\varnothing$，$V$与$\mathscr{H}_\alpha$中任一元素都不相交。因此，$\mathscr{H}_\alpha$在$X$中是局部有限的。

置$\mathscr{H}=\bigcup\{\mathscr{H}_\alpha|\alpha\in A\}$。易知，$\mathscr{H}$是$X$的正则闭复盖，加细$\mathscr{F}$。进而，因为每一$\mathscr{H}_\alpha$在$X$中局部有限，且$\{\mathscr{H}_\alpha{}^*|\alpha\in A\}=\{Y_\alpha|\alpha\in A\}$也在$X$中局部有限，不难证明$\mathscr{H}$是$X$中的局部有限集族。所以，由定理1，$X$是仿$S$-闭空间。 ▌

推论　若空间X可以表示为有限个仿S-闭的既开又闭子集的併，则X是仿S 闭空间. ▌

附记，本文承高国士、吴利生两位老师指导，恽自求同志也提出了有益的意见，特此致谢。

参 考 文 献

[1] Thompson, T.,S-closed spaces, *Proc. Amer. Math. Soc*,60(1976), 335—338.

[2] 王国俊，*S*-闭空间的性质，数学学报，24(1981), 55—63.

[3] ——，*S*-闭空间的绝对闭性，科学通报，21(1982), 1289—1291.

[4] Thompson, T., Semi-continuous and irresolute images of S-closed spaces, *Proc. Amer. Math. Soc*, 66(1977), 359—362.

[5] Cameron, D. E., Properties of S-closed spaces, *ibid*,72(1978), 581—586.

[6] Herrmann, R. A., RC-convergence, *ibid*, 75(1979), 311—317.

[7] Noiri, T., A note on extremally disconnected spaces, *ibid*, 79(1980), 327—330.

[8] Joseph, J. E. and Kwack, M. H., On S-closed spaces, *ibid*, 80(1980), 341—348.

[9] Dickman, R. F.and Krystock, R. L., S-sets and S-perfect mappings, *ibid*, 80(1980), 687—692.

[10] Zahid, M. I., Minimal topologies of para-H-closed spaces, *ibid*, 88(1983), 363—366.

[11] Michael, E., A note on paracompact spaces, *ibid*, 4(1953), 831—838.