第5卷 第3期 数学研究与评论 Vol.5 No.3
1985年7月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION July, 1985

PM-空间内映射半群的公共不动点定理*

丁协平

（四川师范学院数学系）

Bharucha—Reid[1]指出对概率度量空间（简记为PM-空间）内映射不动点理论的研究是有实际意义的．近十几年来，已有许多人从事这一方向的研究．

最近我们在[2]中将Jungck[3]和Fisher[4]关于完备距离空间内交换映射的公共不动点定理改进并推广到了PM-空间，从而使Sehgal；Bharucha-Reid[5]的结果成为我们的定理的特例．本文是[2]的继续．我们将进一步研究PM-空间内映射半群的公共不动点的存在唯一性，将Machuca[6]，Cicic[7]和Das，Naik[8]的重要结果改进并推广到PM-空间．

对各类PM-空间的定义、记号和性质，读者可参见[1,5,9,10]．

设（$E,\mathscr{F}$）为一PM-空间，如果存在Δ-模，使得对一切$x,y,z\in E$；$t_1,t_2>0$有

$$F_{x,y}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,z}(t_1),F_{z,y}(t_2)),$$

则称（$E,\mathscr{F},\Delta$）为Menger空间．关于Δ-模及Menger空间内双参数拓扑的定义和性质可见[10]．

称E的自映射的一族H为半群，如果H关于映射的复合运算是封闭的．

称集$A\subset E$是概率有界的，如果有

$$\sup_{t>0}\sup_{s<t}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(s)=1. \tag{1}$$

定理1 设（$E,\mathscr{F},\Delta$）是一完备Menger空间，Δ是一连续模满足$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$．假H是E的连续自映射半群，则H有公共不动点的充要条件是：存在点$a\in E$，$\alpha\in(0,1)$和映射$g:E\to E$满足（i）$H(a)\cup H(ga)$概率有界，其中$H(a)=\{a\}\cup\{ha;h\in H\}$；(ii) $hg=gh$，$\forall h\in H$；（iii）对每一$x,y\in E$存在$r,s\in H$和$u,v\in\{x,y\}$使得对一切$t>0$有

$$F_{gx,gy}(\alpha t)\geqslant F_{r(u),s(v)}(t). \tag{2}$$

这时g和H在E内有唯一公共不动点．

证 必要性 令a是H的一公共不动点，即$ha=a$，$\forall h\in H$．由令$gx=a$，$\forall x\in E$定义映射$g:E\to E$，则有$H(a)\cup H(ga)=\{a\}$概率有界，$hg=gh$，$\forall h\in H$，且对每一$x,y\in E$和$\alpha\in(0,1)$有

*1983年5月9日收到．

$$F_{gx,gy}(at)=F_{a,a}(at)=1,\quad \forall t>0$$

这蕴含(2)式成立。

充分性 我们用归纳法证明下面结论成立：对每一$n\in N$(正整数集)，如果$x,y\in E$，则存在$r,s\in H$和$u,v\in\{x,y\}$使得对一切$t>0$成立

$$F_{g^nx,g^ny}(t)\geqslant F_{r(u),s(v)}(a^{-n}t). \tag{3}$$

显然结论(3)对$n=1$成立。设(3)对$n=k$成立。于是对$x,y\in E$，从(2)式推得存在$r,s\in H$和$u,v\in\{g^kx,g^ky\}$使得

$$F_{g^{k+1}x,g^{k+1}y}(at)=F_{gg^kx,gg^ky}(at)\geqslant F_{r(u),s(v)}(t),\quad \forall t>0.$$

从而存在$u',v'\in\{x,y\}$使得$u=g^ku',v=g^kv'$和

$$F_{r(u),s(v)}(t)=F_{r(g^ku'),s(g^kv')}(t)=F_{g^k(ru'),g^k(sv')}(t).$$

由归纳假设(3)对$n=k$成立推得存在$r_o,s_o\in H$和$u_o,v_o\in\{ru',sv'\}$使得

$$F_{r(u),s(v)}(t)=F_{g^k(ru'),g^k(sv')}(t)\geqslant F_{r_o(u_o),s_o(v_o)}(a^{-k}t).$$

于是有$r_o(u_o)=r_o(t(u_1))$，其中$t\in\{r,s\}$，$u_1\in\{u',v'\}\subset\{x,y\}$，又因$H$是半群，故有$r_ot=r_1\in H$，即有$r_o(u_o)=r_1(u_1)$和$u_1\in\{x,y\}$，同理有$s_o(v_o)=s_1(v_1)$，其中$s_1\in H$，$v_1\in\{x,y\}$。因此存在$r_1,s_1\in H,u_1,v_1\in\{x,y\}$使得对一切$t>0$成立

$$F_{g^{k+1}x,g^{k+1}y}(at)\geqslant F_{r_1(u_1),s_1(v_1)}(a^{-k}t).$$

即有

$$F_{g^{k+1}x,g^{k+1}y}(t)\geqslant F_{r_1(u_1),s_1(v_1)}(a^{-(k+1)}t),\quad \forall t>0.$$

从而结论(3)对一切$n\in N$成立。

特别对每一$n\in N$存在$r_n,s_n\in H$，$u_n,v_n\in\{a,ga\}$使得对一切$t>0$成立

$$F_{g^na,g^{n+1}a}(t)\geqslant F_{r_n(u_n),s_n(v_n)}(a^{-n}t)\geqslant \inf_{p,q\in H(a)\cup H(ga)}F_{p,q}(a^{-n}t). \tag{4}$$

任给$m,n\in N$，$m>n$，由Δ-模的性质和(4)有

$$\begin{aligned}
F_{g^na,g^ma}(t)&\geqslant\Delta(F_{g^na,g^{n+1}a}((1-a)t),F_{g^{n+1}a,g^ma}(at))\\
&\geqslant\Delta(\inf_{p,q\in H(a)\cup H(ga)}F_{p,q}((1-a)a^{-n}t),\Delta(F_{g^{n+1}a,g^{n+2}a}(at-a^2t),F_{g^{n+2}a,g^ma}(a^2t)))\\
&\geqslant\Delta(\inf_{p,q\in H(a)\cup H(ga)}F_{p,q}((1-a)a^{-n}t),F_{g^{n+2}a,g^ma}(a^2t))\\
&\quad\vdots\\
&\geqslant\Delta(\inf_{p,q\in H(a)\cup H(ga)}F_{p,q}((1-a)a^{-n}t),F_{g^{m-1}a,g^ma}(a^{m-n-1}t))\\
&\geqslant\Delta(\inf_{p,p\in H(a)\cup H(ga)}F_{p,q}((1-a)a^{-n}t),\inf_{p,q\in H(a)\cup H(ga)}F_{p,q}(a^{-n}t))\\
&\geqslant\inf_{p,q\in H(a)\cup H(ga)}F_{p,q}((1-a)a^{-n}t).
\end{aligned} \tag{5}$$

因$H(a)\cup H(ga)$概率有界蕴含$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{p,q\in H(a)\cup H(ga)}F_{p,q}((1-a)a^{-n}t)=1$。

故在(5)式中令$n\to\infty$得到$\lim\limits_{n\to\infty}F_{g^na,g^ma}(t)=1$，$\forall t>0$，因此$\{g^na\}$是一Cauchy序列。令

$g^n a \to b$。由此推得 $h(g^n a) = g^n(ha) \to h(b)$，$\forall h \in H$。又注意到 $F_{x,y}(t)$ 对每一固定的 $t>0$ 关于 x,y 是下半连续的（见[10]），由（3）式知存在 $r,s \in H$，$u,v \in \{a, h(a)\} \subset H(a)$ 使得对每一 $h \in H$，$t>0$ 有

$$F_{b,h(b)}(t) = \liminf_{n\to\infty} F_{g^n a, g^n(ha)}(t) \geqslant \liminf_{n\to\infty} F_{r(u),s(v)}(a^{-n}t)$$

$$\geqslant \liminf_{n\to\infty} \inf_{p,q\in H(a)} F_{p,q}(a^{-n}t) = 1.$$

这蕴含 $b = h(b)$，$\forall h \in H$。

由（2）知存在 $r,s \in H$，$u,v \in \{b, g^n a\}$ 使得

$$F_{gb, g^{n+1}a}(t) \geqslant F_{r(u),s(v)}(a^{-1}t), \quad \forall t>0. \tag{6}$$

下面分三种情形讨论：

(a)　当 $u=v=b$ 时，(6)式化为

$$F_{gb,g^{n+1}a}(t) \geqslant F_{r(u),s(v)}(a^{-1}t) = F_{b,b}(a^{-1}t) = 1, \quad \forall t>0, \tag{7}$$

(b)　当 $u=b, v=g^n a$ 或 $v=b, u=g^n a$ 时，无妨设 $u=b, v=g^n a$，则（6）式化为

$$F_{gb,g^{n+1}a}(t) \geqslant F_{b,s(g^n a)}(a^{-1}t) = F_{b,g^n(sa)}(a^{-1}t), \quad \forall t>0, \tag{8}$$

(c)　当 $u=g^n a, v=g^n a$ 时，(6)式化为

$$F_{gb,g^{n+1}a}(t) \geqslant F_{r(g^n a),s(g^n a)}(a^{-1}t) = F_{g^n(ra),g^n(sa)}(a^{-1}t), \quad \forall t>0. \tag{9}$$

在（7）（8）和（9）式中令 $n\to\infty$ 取下极限得到

$$F_{gb,b}(t) = 1, \quad \forall t>0.$$

因此有 $gb = b = hb$，$\forall h \in H$。即 b 是 g 和 H 的一公共不动点，b 的唯一性容易从（2）式得到。

注1　如果在定理 1 中令 $H=\{I\}$（I 为恒等映射，作为特殊情形，得到[5]定理 3。

系1　设 H 是完备 Menger 空间 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 的连续自映射半群，其中 Δ 是连续模满足 $\Delta(t,t) \geqslant t$，$\forall t \in [0,1]$，假设存在 $a \in (0,1)$ 使得对每一 $x,y \in E$ 存在 $h,f \in H$ 使得 $F_{x,y}(at) \geqslant F_{hx,fy}(t)$，$\forall t>0$，则 H 有一公共不动点的充要条件是对某 $a \in E$，$H(a)$ 概率有界。

证　在定理 1 中令 $g=I$，知系 1 成立。

注2　系 1 改进和推广了[6]的结果到 PM-空间。

由仔细分析定理 1 的证明我们可得到

系2　设 H 是完备 Menger 空间 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 自映射的交换半群，Δ 满足定理1内假设。则 H 有一公共不动点的充要条件是：存在 $a \in E$，$a \in (0,1)$ 和 $g \in H$ 使得 (i) $H(a)$ 概率有界；(ii) 对每一 $h \in H \backslash g$，h 在 $\mathrm{cl}(\{g^n a\}_{n>0})$ 上连续；(iii) 对每一 $x,y \in \mathrm{cl}(\{g^n a\}_{n>0})$ 存在 $r,s \in H$ 和 $u,v \in \{x,y\}$ 使得

$$F_{gx,gy}(at) \geqslant F_{r(u),s(v)}(t), \quad \forall t>0. \tag{10}$$

如果(10)式对一切 $x,y\in E$成立，则公共不动点是唯一的。

如果在系 2 中令 $H=\{g^n:n\geqslant 0\}$，则有

系3 设 g 是完备 Menger 空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$的自映射，Δ满足定理1内假设。则 g 有一不动点的充要条件是：存在 $a\in E$，$\alpha\in(0,1)$ 使得 $\{g^n a\}_{n=0}$ 概率有界；g在 $\mathrm{cl}(\{g^n a\}_{n=0})$ 上连续和对每一 $x,y\in\mathrm{cl}(\{g^n a\}_{n\geqslant 0})$ 存在 $n(x),m(y)\geqslant 0$ 使得

$$F_{gx,gy}(\alpha t)\geqslant F_{g^{n(x)}x,g^{m(y)}y}(t),\quad \forall t>0.$$

如果在系 2 中令 $H=\{f^n g^m,n,m\geqslant 0\}$，其中 $fg=gh$。则我们有

系4 设 f,g 是完备 Menger 空间 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 的交换自映射，Δ满足定理 1 内假设。则 f,g 有一公共不动点的充要条件是：存在 $a\in E$，$\alpha\in(0,1)$ 使得 $\{f^n g^m a\}_{m,n>0}$ 概率有界；f 在 $\mathrm{cl}(\{f^n g^m a\}_{n,m>0})$ 上连续和对每一$x,y\in\mathrm{cl}(\{f^n g^m a\}_{n,m>0})$，有

$$F_{gx,gy}(\alpha t)\geqslant\min\{F_{fx,fy}(t),F_{fx,gx}(t),F_{fy,gy}(t),F_{fx,gy}(t),F_{fy,gx}(t)\},\quad \forall t>0 \tag{11}$$

如果(11)式对一切 $x,y\in E$ 成立则 f,g 的公共不动点是唯一的。

注3 系 4 可视为[8]和[7]中主要结果推广到PM-空间的情形。

参考文献

[1] Bharucha—Reid, A. T., *Bull. Amer. Math. Soc.* 82(1976), 641—657.
[2] 丁协平，科学通报，28(10) (1983)，563—566.
[3] Jungck,G., *Amer. Math. Monthly*, 83(1976), 261—263.
[4] Fisher, B., *Math. Semi.Notes*, 7(1979), 81—84.
[5] Sehgal, V. M. & Bhrucha—Reid, A. T., *Math. Systems Theory*, 6(1972], 97--102.
[6] Machuca, R., *Amer. Math. Monthly*, 74(1967), 569,
[7] Ciric, Lj. B., *Proc. Amer. Math.Soc.*, 45(1974), 267—273.
[8] Das, K.M. & Naik, K. V., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 77(1979), 369—373.
[9] Menger, K., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 28(1942), 535—537.
[10] Schweizer, B. & Sklar, A., *Pacific J. Math.*, 10(1960), 313—334.