第5卷 第3期 数学研究与评论 Vol.5 No.3
1985年7月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION July, 1985

关于C^n空间有界域的一个解析不变量*

陈纪阳

（福州师范专科学校）

陆启铿曾在[1]中证明了：若$\mathscr{D}$是C^n空间的有界可递域，则存在一仅与$\mathscr{D}$有关的正数$k_0(\mathscr{D})(\geqslant 1)$使得对任一$w=f(z)$：$\mathscr{D}\to\mathscr{D}$是解析的，皆有

$$\frac{\partial w}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w,\bar{w})\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}\leqslant k_0(\mathscr{D})T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z}),$$

$k_0(\mathscr{D})$是域$\mathscr{D}$的一个解析不变量，称之为域$\mathscr{D}$的Schwarz常数，其中$T_{\mathscr{D}}$表域$\mathscr{D}$的Bergmann度量方阵。本文将要证明：对于C^n中任一有界域$\mathscr{D}$，必存在一解析不变量$\lambda(\mathscr{D})(\leqslant 1)$，当$\mathscr{D}$是可递域时$\lambda(\mathscr{D})<1$且$k_0(\mathscr{D})=\dfrac{\lambda(\mathscr{D})}{1-\lambda(\mathscr{D})}$。此外还讨论了$\lambda(\mathscr{D})$的示性作用。

I）用$\mathrm{Aut}(\mathscr{D})$表示$C^n$空间有界域$\mathscr{D}$上所有解析自同胚组成的自同构群

定义1.1 域$\mathscr{D}$的子集$\mathscr{A}$称做拟可递的，如果存在$\mathscr{D}$的闭子集G满足$\mathscr{A}=\mathrm{Aut}(\mathscr{D})(G)$。

由定义1.1直接推得以下简单性质：

性质1 如果$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{D}$是拟可递的，则定义1.1中指出的闭集$G\subseteq\mathscr{A}$。

性质2 如果$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{D}$是拟可递的，则$\mathscr{A}$是解析不变的，意即对于域$\mathscr{D}$的任一解析自同胚$h$皆有$h(\mathscr{A})=\mathscr{A}$。

性质3 对于域$\mathscr{D}$中的任一闭子集G，置

$$\mathscr{A}(G)=\bigcup_{h\in \mathrm{Aut}(\mathscr{D})}h(G),$$

那么$\mathscr{A}(G)$是拟可递的。

定理一 对C^n中的任一有界域$\mathscr{D}$及$\mathscr{D}$中的任一拟可递的子集$\mathscr{A}$，则存在仅与$\mathscr{D}$及$\mathscr{A}$有关的常数$k>0$，使得对于C^n空间的任一有界域$\mathscr{G}$及把$\mathscr{G}$映入$\mathscr{A}$的任一解析映照$w=f(z)$，恒有

$$\frac{\partial w}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w,\bar{w})\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}\leqslant k^2T_{\mathscr{G}}(z,\bar{z}). \tag{1.1}$$

特别当$\mathscr{G}=\mathscr{D}$时，使(1.1)成立的最小正数记作$k(\mathscr{D},\mathscr{A})$。

这个定理的证明方法与(1)中一样，它需要用到以下两个引理：

引理1.1 如果$\mathscr{D}$是C^n中有界域，G是$\mathscr{D}$中的任一闭集，则存在一只与$\mathscr{D}$及G有关的常数M，使得

$$\sup_{z\in G}|\lambda(z,\mathscr{D})|<M^2, \tag{1.2}$$

* 1983年5月25日收到。

$|\lambda(z,\mathscr{D})|$表方阵$T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z})$在$z$点的特征根按模取最大值。(证略)

引理1.2 如果$\mathscr{D}$是C^n中任一有界域，对任一n个函数$f(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$其中每一个$f_\lambda(z)$皆在$\mathscr{D}$解析且适合$|f_1|^2+\cdots+|f_n|^2\leqslant M$。$M$是正常数，则有

$$\frac{\partial f}{\partial z}\overline{\frac{\partial f'}{\partial z}}\leqslant M^2T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z}).$$

(见(2)定理3.6.2)。

推论1.1 如果有界域$\mathscr{D}$内存在闭集G使得$\mathscr{D}=\mathscr{A}(G)$($\mathscr{A}(G)$见性质3)，则存在仅与$\mathscr{D}$有关的常数$k>0$，使得(1.1)式成立。

特别当$\mathscr{D}$是有界可递域时，取$\mathscr{D}$中任一点作为闭集G，则$\mathscr{D}=\mathscr{A}(G)$。从而推得(1)的结果。

II) 现在来证明本文主要结果之一：

定理二 对C^n中的任一有界域$\mathscr{D}$皆存在一个仅与$\mathscr{D}$有关的正常数$\lambda(\mathscr{D})(\leqslant 1)$，它是域$\mathscr{D}$的一个解析不变量，当$\mathscr{D}$是可递域时，必有$\lambda(\mathscr{D})<1$且$k_0(\mathscr{D})=\dfrac{\lambda(\mathscr{D})}{1-\lambda(\mathscr{D})}$.($k_0(\mathscr{D})$是域$\mathscr{D}$的Schwarz常数)。

为了证明这个定理，需要引入闭分类的概念：

定义2.1 称C^n中有界域$\mathscr{D}$的可列个拟可递子集$\mathscr{A}_i(i=1,2,\cdots)$的集合是域$\mathscr{D}$的一个闭分类，记作$A(\mathscr{A}_i)$；如果$\mathscr{D}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{A}_k$.

引理2.1 C^n中任一有界域$\mathscr{D}$必存在闭分类(证略)。

引理2.2 设f是C^n中有界域$\mathscr{D}$到有界域$\mathscr{D}^*$的一一解析映照，则f把域$\mathscr{D}$中的拟可递子集$\mathscr{A}$仍映为$\mathscr{D}^*$中的拟可递子集$\mathscr{A}^*=f(\mathscr{A})$。特别当$\mathscr{D}^*=\mathscr{D}$时$\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$。(证略)

引理2.3 设f是C^n中有界域$\mathscr{D}$到有界域$\mathscr{D}^*$的一一解析映照，则f把域$\mathscr{D}$的任一闭分类$A_{\mathscr{D}}$仍映为$\mathscr{D}^*$中的闭分类$A_{\mathscr{D}^*}=f(A_{\mathscr{D}})$。特别当$\mathscr{D}^*=\mathscr{D}$时$f(A_{\mathscr{D}})=A_{\mathscr{D}}$。(证略)

定理二的证明 把域$\mathscr{D}$的所有闭分类组成的分类集合记作$\mathfrak{B}$，对应于$\mathscr{D}$中的每一个闭分类$A_{\mathscr{D}}(\mathscr{A}_k)$，由定理一则相应地得到了一列正数

$$k(\mathscr{D},\mathscr{A}_1),\ k(\mathscr{D},\mathscr{A}_2),\cdots,k(\mathscr{D},\mathscr{A}_n),\cdots$$

置

$$\lambda_{A_{\mathscr{D}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{k(\mathscr{D},\mathscr{A}_u)}{1+k(\mathscr{D},\mathscr{A}_n)},\tag{2.1}$$

显然$0<\lambda_{A_{\mathscr{D}}}\leqslant 1$。取$\lambda(\mathscr{D})=\sup\limits_{A_{\mathscr{D}}\in\mathscr{B}}\lambda_{A_{\mathscr{D}}}$。由引理2.1知$\mathfrak{B}$是非空的，所以$\lambda(\mathscr{D})$必存在。

我们证明$\lambda(\mathscr{D})$是域$\mathscr{D}$的一个解析不变量。

设$\mathscr{D}$和$\mathscr{D}^*$是C^n中两个彼此解析等价的有界域。f是$\mathscr{D}$到$\mathscr{D}^*$的一一解析映照。对$\mathscr{D}$中任一闭分类$A_{\mathscr{D}}$，则由引理2.3知$f(A_{\mathscr{D}})=A_{\mathscr{D}^*}$是$\mathscr{D}^*$中的闭分类。由此不难推得$f$建立了域$\mathscr{D}$的闭分类的全体集合$\mathfrak{B}(\mathscr{D})$与域$\mathscr{D}^*$的闭分类的全体集合$\mathfrak{B}(\mathscr{D}^*)$之间的一一对应关系。设$A_{\mathscr{D}}$是$\mathscr{D}$中任一闭分类，它由域$\mathscr{D}$中的可列个拟可递域$\mathscr{A}_i(i=1,2,\cdots)$组成，则由引理2.2知$f(\mathscr{A}_i)=\mathscr{A}_i^*(i=1,2,\cdots)$是域$\mathscr{D}^*$中的拟可递子集且$\mathscr{A}_{\mathscr{D}^*}$正是由这些拟可递子集组成的。利用[2]中定理2.5.2有

$$T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z})=\frac{\partial f}{\partial z}T_{\mathscr{D}^*}(w,\bar{w})\overline{\frac{\partial f'}{\partial z}},\tag{2.2}$$

其中 $f=(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_n(z))$，$\varphi_i(z)=w_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

设 $h^*=h^*(w)$ 是任一把域 $\mathscr{D}^*$ 映入 $\mathscr{A}_i^*$ 的解析映照。那么由 $f^{-1}(\mathscr{A}_i^*)=\mathscr{A}_i$ 则 $f^{-1}h^*f$ 是把域 $\mathscr{D}$ 映入 $\mathscr{A}_i$ 的解析映照，记 $g=f^{-1}h^*f$。由定理一得：

$$\frac{\partial g}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(g,\bar{g})\overline{\frac{\partial g'}{\partial z}}\leqslant k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i)T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z}),\tag{2.3}$$

用(2.2)代入(2.3)得

$$\frac{\partial h^*}{\partial w}T_{\mathscr{D}^*}(h^*,\bar{h}^*)\overline{\frac{\partial h^{*\prime}}{\partial w}}\leqslant k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i)T_{\mathscr{D}^*}(w,\bar{w}),$$

而 $k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i^*)$ 是定理一($\mathscr{D}=\mathscr{G}$ 情况)中使得上式成立的最小正数，于是 $k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i^*)\leqslant k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i)$。同理可证 $k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i)\leqslant k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i^*)$ 所以 $k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i)=k(\mathscr{D},\mathscr{A}_i^*)$。

特别当 $\mathscr{D}$ 是可递域时，对 $\mathscr{D}$ 中任一非空的拟可递子集 $\mathscr{A}$，由 1) 的性质 3 则有 $\mathscr{A}=\mathscr{D}$，所以 $k(\mathscr{D},\mathscr{A})=k_0(\mathscr{D})$。由(2.1)式得对于可递有界域 $\mathscr{D}$ 的任一闭分类 $A_{\mathscr{D}}(\mathscr{A}_i)$ 皆有 $\lambda_{A_{\mathscr{D}}}=\dfrac{k_0(\mathscr{D})}{1+k_0(\mathscr{D})}$，所以 $\lambda(\mathscr{D})=\dfrac{k_0(\mathscr{D})}{1+k_0(\mathscr{D})}<1$，则 $k_0(\mathscr{D})=\dfrac{\lambda(\mathscr{D})}{1-\lambda(\mathscr{D})}$。

Ⅲ）本节讨论解析不变量 $\lambda(\mathscr{D})$ 的示性作用

定理三　C^n 空间的有界域 $\mathscr{D}$，如果存在着 Schwarz 常数 $k_0(\mathscr{D})$，则 $\lambda(\mathscr{D})<1$。并且如果 $\lambda(\mathscr{D})=1$，则域 $\mathscr{D}$ 不存在 Schwarz 常数。（证略）

推论3.1　如果 C^n 空间的有界域 $\mathscr{D}$ 的解析不变量 $\lambda(\mathscr{D})=1$，则 $\mathscr{D}$ 是不可递域。

定义3.1　C^n 中有界域 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 的解析映照 f 称做拟内闭的，如果存在 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 的解析映照串 f_n 使得：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)=f(z)$　$(\forall z\in\mathscr{D})$。

2) $f_n(\mathscr{D})=G_n$ 且 $\bar{G}_n\subset\mathscr{D}$。（$\bar{G}_n$ 表 G_n 的闭包）。

把有界域 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 的全体拟内闭解析映照记作 $s(\mathscr{D})$，我们首先指出以下定理成立。

定理四　C^1 空间中任一有界域 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 的解析映照 f 都是拟内闭的。（证略）

定理五　C^n 中有界域 $\mathscr{D}$，如果其解析不变量 $\lambda(\mathscr{D})<1$，则存在一个仅与 $\mathscr{D}$ 有关的正常数 $H(\mathscr{D})$ 使得对于任一 $w=f(z)\in s(\mathscr{D})$ 皆有

$$\frac{\partial w}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w,\bar{w})\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}\leqslant H(\mathscr{D})T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z}),\tag{3.1}$$

反之，如果这样的常数 $H(\mathscr{D})$ 不存在，则 $\lambda(\mathscr{D})=1$。

证明　设 $\lambda(\mathscr{D})<1$，那么对于域 $\mathscr{D}$ 中任一拟可递子集 $\mathscr{A}$ 必有 $k(\mathscr{D},\mathscr{A})\leqslant\dfrac{\lambda(\mathscr{D})}{1-\lambda(\mathscr{D})}$（详证从略）。现在设 $w=f(z)\in s(\mathscr{D})$，那么存在 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 的解析映照串 $f_n(z)=w_n$ 满足定义 3.1 中的1)、2)式。由定理一，可得

$$\frac{\partial w_n}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w_n,\bar{w}_n)\overline{\frac{\partial w_n'}{\partial z}}\leqslant k(\mathscr{D},\mathscr{A}(\bar{G}_n))T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z}),\tag{3.2}$$

从而得

$$\frac{\partial w_n}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w_n,\bar{w}_n)\overline{\frac{\partial w_n'}{\partial z}}\leqslant\frac{\lambda(\mathscr{D})}{1-\lambda(\mathscr{D})}T_{\mathscr{D}}(z,\bar{z}),\tag{3.3}$$

记 $f(z)=(F_1(z),\cdots,F_n(z))$，$f_k(z)=(f_{1k}(z),\cdots,f_{nk}(z))$，$k=1,2,\cdots$，则有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_{ik}=F_i(z)$ $(\forall z\in\mathscr{D})$，$i=1,2,\cdots,n$。又因为 $\mathscr{D}$ 是有界域，则 $\{f_{ik}\}(i=1,2,\cdots,n)$ 都是局部一致有界的，由[2]的定理 1.8.5 得

$$\frac{\partial F_i(z)}{\partial z_j}=\lim_{k\to\infty}\frac{\partial f_{ik}(z)}{\partial z_j}, \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\partial f_k(z)}{\partial z}=\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ $(\forall z\in\mathscr{D})$。并且对于 $\mathscr{D}$ 中任一固定的点 z，当 $n\to\infty$ 时 $w_n=f_n(z)$ 趋于 $w=f(z)$。从而有 $T_{\mathscr{D}}(w_n,\overline{w}_n)\to T_{\mathscr{D}}(w,\overline{w})$。再由(3.3)推得

$$\frac{\partial f}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w,\overline{w})\overline{\frac{\partial f'}{\partial z}}\leqslant\frac{\lambda(\mathscr{D})}{1-\lambda(\mathscr{D})}T_{\mathscr{D}}(z,\overline{z}).$$

取 $H(\mathscr{D})=\frac{\lambda(\mathscr{D})}{1-\lambda(\mathscr{D})}$，此即(3.1)式。

反之，如果这样的正常数 $H(z)$ 不存在，那么对任意给定的充分大的正数 N，存在 $f\in s(\mathscr{D})$ 及 $\mathscr{D}$ 中一点 z_0，使得 $f(z_0)=w_0$ 且

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w_0,\overline{w}_0)\overline{\frac{\partial f(z_0)'}{\partial z}}>NT_{\mathscr{D}}(z_0,\overline{z}_0).$$

设 $f_k(z)$ 是 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 的解析映照且 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(z)=f(z)$，$\overline{f_k(\mathscr{D})}=\overline{G}_k\subset\mathscr{D}$。由上面所证易知，当 n 取充分大时

$$\frac{\partial f_n(z_0)}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w_{0n},\overline{w}_{0n})\overline{\frac{\partial f_n(z_0)'}{\partial z}}>NT_{\mathscr{D}}(z_0,\overline{z}_0),$$

其中 $f_n(z_0)=w_{0n}$。对于这些 n 皆有 $k(\mathscr{D},\mathscr{A}(\overline{G}_n))\geqslant N$。从中任取一个 $\overline{G}_n$ 记作 G，那么 $k(\mathscr{D},\mathscr{A}(G))\geqslant N$。由此可证

$$\frac{N}{1+N}\leqslant\frac{k(\mathscr{D},\mathscr{A}(G))}{1+k(\mathscr{D},\mathscr{A}(G))}\leqslant\lambda(\mathscr{D}).\text{（详证从略）}$$

但是 N 可以取任意大的正数且 $\lambda(\mathscr{D})\leqslant1$ 故得 $\lambda(\mathscr{D})=1$。

综合定理三和定理五，可得

推论3.1 C^n 空间中的有界域 $\mathscr{D}$，存在一个仅与 $\mathscr{D}$ 有关的正常数 $H(\mathscr{D})$ 使得对任一 $w=f(z)\in s(\mathscr{D})$ 皆有

$$\frac{\partial w}{\partial z}T_{\mathscr{D}}(w,\overline{w})\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}\leqslant H(\mathscr{D})T_{\mathscr{D}}(z,\overline{z})$$

成立的充要条件是域 $\mathscr{D}$ 的解析不变量 $\lambda(\mathscr{D})<1$。

参 考 文 献

[1] 陆启铿，多复变函数的Schwarz引理，数学学报7(1957)，370-420.
[2] 陆启铿，多复变函数引论，科学出版社(1961).

An Analytic Invariant of the Bounded Domains in Space C^n

Chen Ji-yan

The main results of the present paper are: For any bounded $\mathscr{D}$ in space C^n, there is an analytic invariant $\lambda(\mathscr{D})(\leqslant1)$. If $\mathscr{D}$ is a transitive domain, then $\lambda(\mathscr{D})<1$ and $k_0(\mathscr{D})=\frac{\lambda(\mathscr{D})}{1-\lambda(\mathscr{D})}$, where $k_0(\mathscr{D})$ is the Schwarz constant of domain $\mathscr{D}$ (cf[1]). And we have discussed the Characteristic properties of $\lambda(\mathscr{D})$.