第5卷 第3期　数学研究与评论　Vol.5 No.3
1985年7月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　July, 1985

一类二阶泛函微分方程解的渐近性*

李克难

(湖南大学数学系)

对各类二阶微分方程解的性质，自1971年Hammett[4]以来已有许多讨论，如[1]——[10]。本文讨论二阶时滞泛函微分方程

$$(r(t)x'(t))'+\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i'(x(t-\tau_i(t)))+\sum_{i=0}^{n}q_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))=f(t) \qquad (1)$$

的解的渐近性质。其中$'=\frac{d}{dt}$；$r(t)$、$q_i(t)$、$g_i(x)$、$\tau_i(t)$、$f(t)$连续；$p_i(t)$连续可微；当$p_i(t)$不恒为0时，$g_i(x)$连续可微；当$x\neq0$，$xg_i(x)>0$；$g_i(x)$关于x单调不减；$0\leqslant\tau_i(t)\leqslant t$，$\lim\limits_{t\to\infty}t-\tau_i(t)=\infty$；$r(t)>0$；$F(u)=\int_{t_0}^{u}|f(s)|ds<\infty$；$g_0(x)=x$，$\tau_0(t)=0$。

方程(1)包括形如

$$(r(t)x'(t))'+q(t)g(x(t))=f(t) \qquad (1)_1$$

$$(r(t)x'(t))'+q(t)x(h(t))=f(t) \qquad (1)_2$$

$$(r(t)x'(t))'+q(t)x(t)+p(t)x'(t)+a(t)g(x(h(t)))=f(t) \qquad (1)_3$$

等多种形式。本文所得结果，包含和改进了文献[4]——[9]对$(1)_i$型方程所得的结果。若令系数满足[1]——[3]中的相应条件，则我们的结果还包含了[1]——[3]的相应结果。

对(1)的解$x(t)$，若有一列$t_j\to\infty$，使$x(t_j)=0$。则称$x(t)$为(1)的振动解。否则称为非振动解。对振动解$x(t)$，若当t充分大后$x(t)$不变号，则称$x(t)$为Z型解。

定理1　设 i)．$\int^{\infty}\frac{ds}{r(s)}=+\infty, r(t)\geqslant k>0$；ii)．对所有$i$，$p_i(t)\geqslant0$，$(p_i'(t)-q(t))\leqslant0$；且存在某一$l$，使对任何互不相交的区间集$\{[t_j,s_j]\}$，只要$s_j-t_j>\varepsilon_0>0$对充分大的$j$都成立，就有$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t_j}^{s_j}(p_l'(s)-q_l(s))ds=-\infty$；iii)．对上面的$l$，$0\leqslant\tau_l(t)\leqslant M$，$0\leqslant\tau_l'(t)\leqslant1$；则(1)的所有非振动解及Z型解都趋于0。

证明　我们只对非振动解证明。Z型解可完全类似地证明。

设$x(t)$是(1)的非振动解。不妨设当$t>T$，$x(t-\tau_i(t))>0$，$0\leqslant i\leqslant n$。故有$g_i(x(t-\tau_i(t)))>0$。

又(1)等价于

$$\frac{d}{dt}\Big[r(t)x'(t)+\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))\Big]+\sum_{i=0}^{n}(q_i(t)-p_i'(t))g_i(x(t-\tau_i(t)))=f(t) \qquad (2)$$

*1984年2月7日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

此时必有 $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_T^t(q_l(s)-p_l'(s))g_l(x(s-\tau_l(s)))ds<\infty$ (3)

否则，对(2)从T到$t>T$积分．令$t\to\infty$，得

$$r(t)x'(t)+\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))\leqslant c-\int_T^t(q_l(s)-p_l'(s)).g_l(x(s-\tau_l(s)))ds\to-\infty.$$

故当$t>T_1>T$时，$x'(t)>-\frac{1}{r(t)}$．得$x(t)-x(T_1)<-\int_{T_1}^t\frac{ds}{r(s)}\to-\infty$，只要$t\to\infty$．矛盾．

由(3)及ii)得，$\varliminf\limits_{t\to\infty}g_l(x(t-\tau_l(t)))=0$．故有$\varliminf\limits_{t\to\infty}x(t-\tau_l(t))=0$．则$\varliminf\limits_{t\to\infty}x(t)=0$．

再证 $\varlimsup\limits_{t\to\infty}x(t)=0$．若不然，$\varlimsup\limits_{t\to\infty}x(t)\geqslant 2N>0$．令 $h(t)=t-\tau_l(t)$，则$h'(t)=1-\tau_l'(t)\geqslant 0$．故$h(t)$连续．单调不减．则$\varlimsup\limits_{t\to\infty}x(h(t))=\varlimsup\limits_{t\to\infty}x(t)\geqslant 2N$．因此，可取到区间列$\{[a_j,b_j]\}$，使$x(a_j-\tau_l(a_j))=\frac{N}{2}$，$x(b_j-\tau_l(b_j))=\frac{3}{2}N$，对 $t\in[a_j,b_j]$，$x(h(t))\geqslant\frac{N}{2}$，且$\lim\limits_{j\to\infty}a_j=\infty$．

从T到$t>T$积分(2)式，由于$q_i(t)-p'_i(t)\geqslant 0$，故有$r(t)x'(t)+\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))<K$，则由i)$x'(t)<\frac{K}{k}$．而$x'(t-\tau_l(t))=x'(h)\ (1-\tau_l'(t))\leqslant\frac{K}{k}$．则必有$\varepsilon_0>0$，使对所有$j$都有$b_j-a_j>\varepsilon_0$故有$\int_T^\infty(q_l(s)-p_l'(s))g_l(x(s-\tau_l(s)))ds\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_j}^{b_j}(q_l(s)-p_l'(s))\cdot g_l(x(s-\tau_l(s)))ds\geqslant g_l\left(\frac{N}{2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_j}^{b_j}(q_l(s)-p_l'(s))ds=\infty$．与(3)矛盾．故$\varlimsup\limits_{t\to\infty}x(t)=0$．对$x(t)<0$的情形同样可证． 证毕．

定理2 设 i)$\int^\infty\frac{ds}{r(s)}=+\infty$；当$b-a$有界时，$\int_a^b\frac{ds}{r(s)}$有界；ii)$p_i(t)\geqslant 0$；$\lim\limits_{t\to\infty}p_i(t)=0$ $p_i'(t)-q_i(t)\leqslant 0$；当$b_j-a_j\to\infty$时，$\int_{a_j}^{b_j}(p_i'(s)-q_i(s))ds\to-\infty$；$0\leqslant i\leqslant n$；iii) 当$|x|$充分大时，有$|g_i(x)|\leqslant m|x|$．$m>0$为常数，$i=0,1,\cdots,n$；则(1)的所有非振动解及Z型解都趋于0．

证明 同样只证非振动解的情况．

设$x(t)$是(1)的非振动解，当$t>T$时，不妨设$x(t-\tau_i(t))>0$，则$g(x(t-\tau_i(t)))>0$．与定理1证明中同样，此时对所有i，都有(3)式成立．因此有$\varliminf\limits_{t=\infty}x(t)=0$．

先证$x(t)$必定有界．若不然，则可取到$a_j<T_j<b_j$，使$x(a_j)=x(b_j)=\frac{1}{2}x(T_j)$；对$t\leqslant b_j$，$x(t)\leqslant x(T_j)$；且$x'(a_j)\geqslant 0$，$x'(b_j)\leqslant 0$．对$t\in[a_j,b_j]$，$\frac{1}{2}x(T_j)\leqslant x(t)\leqslant x(T_j)$．且$j\to\infty$时，$a_j\to\infty$，$x(T_j)\to\infty$．由ii)及(3)式，序列$\{b_j-a_j\}$必定有界．记$M_j=x(T_j)$，

$$\alpha_j=\int_{a_i}^{b_i}\frac{ds}{r(s)},\quad \beta_j=\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds, \tag{4}$$

则$M_j=\int_{a_j}^{T_j}x'(t)dt-\int_{T_j}^{b_j}x'(t)dt\leqslant\int_{a_j}^{b_j}x'(s)ds$．利用 Cauchy积分不等式，有$M_j^2\leqslant\beta_j^2\leqslant\alpha_j\int_{a_j}^{b_j}r(s)x'(s)^2ds$．又$r(s)x'(s)^2=(r(s)x(s)x'(s))'-x(s)(r(s)x'(s))'$，故

$$\beta_j^2\leqslant\alpha_j\int_{a_j}^{b_j}(r(s)x(s)x'(s))'-x(s)(r(s)x'(s))'ds$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\leqslant a_j\int_{a_j}^{b_j}x(s)\left[\sum_{i=0}^{n}(p_i(s)g_i'(x(s-\tau_i(s)))+q_i(s)g_i(x(s-\tau_i(s)))-f(s)\right]ds$$

$$\leqslant a_j\left[x(b_j)\sum_{i=0}^{n}p_i(b_j)g_i(x(b_j-\tau_i(b_j)))+\sum_{i=0}^{n}\int_{a_j}^{b_j}(q_i(s)-p_i'(s))x(s)g_i(x(s-\tau_i(s)))ds-\right.$$

$$\left.\sum_{i=0}^{n}\int_{a_j}^{b_j}p_i(s)g_i(x(s-\tau_i(s)))x'(s)ds-\int_{a_j}^{b_j}f(s)x(s)ds\right]. \tag{5}$$

由ii)，(3)，当 j 充分大时，有$p_i(t)\leqslant\frac{1}{4Rm(n+1)}$，$t\geqslant a_j$；$\int_{a_j}^{b_j}(q_i(s)-p_i'(s))g_i(x-\tau_i(s))ds<\frac{1}{8R(n+1)}$；$\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds<\frac{1}{8R}$，其中$R$为常数，满足$\int_{a_j}^{b_j}\frac{ds}{r(s)}\leqslant R<\infty$。所以 $\beta_j^2\leqslant R\left[\frac{M_j}{2}mM_j\cdot\frac{n+1}{4Rm(n+1)}+M_j\frac{n+1}{8R(n+1)}+\frac{mM_j(n+1)}{4Rm(n+1)}\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds+M_j\frac{1}{8R}\right]\leqslant\frac{M_j^2}{8}+\frac{1}{4}M_j+\frac{M_j}{4}\beta_j$，

则得　$M_j\leqslant\beta_j\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{M_j}{4}+\sqrt{\frac{M_j^2}{16}+\frac{M_j^2}{2}+M_j}\right)$。只要 $M_j>4$，就有

$$1\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{M_j}}\right)<1,$$ 矛盾。故$x(t)$有界，设$x(t)<M$。

若$\overline{\lim_{t\to\infty}}x(t)=2\varepsilon_0>0$，同样取$a_j<T_j<b_j$，使$x(a_j)=x(b_j)=\frac{\varepsilon_0}{2}$，$x(T_j)>\varepsilon_0$。$x'(a_j)\geqslant0$，$x'(b_j)\leqslant0$。且对 $t\in[a_j,b_j]$，$x(t)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$。则同样应有 $\{b_i-a_j\}$ 有界。且有 $\varepsilon_0\leqslant\beta_i$。而 (5) 式同样成立。当 j 充分大时，同样有

$p_i(t)\leqslant\frac{\varepsilon_0}{4Rg_i(M)(n+1)}$，$t\geqslant a_j$；$\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds\leqslant\frac{\varepsilon_0^2}{32RM}$；$\int_{a_j}^{b_j}(q_i(s)-p_i'(s))g_i(x(s-\tau_i(s)))ds\leqslant\frac{\varepsilon_0^2}{32RM(n+1)}$；得出$\beta_j^2\leqslant R\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\varepsilon_0}{4Rg_j(M)(n+1)}g_i(M)+\frac{M(n+1)\varepsilon_0^2}{32RM(n+1)}+\sum_{i=0}^{n}\frac{\varepsilon_0}{4Rg_i(M)(n+1)}g_i(M)\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds+\frac{M\varepsilon_0^2}{32RM}\right]\leqslant\frac{1}{8}\varepsilon_0^2+\frac{1}{32}\varepsilon_0^2+\frac{\varepsilon_0}{4}\beta_j+\frac{1}{32}\varepsilon_0^2$，

故　$\varepsilon_0\leqslant\beta_i\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0}{4}+\sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{16}+4\left(\frac{\varepsilon_0^2}{8}+\frac{\varepsilon_0^2}{16}\right)}\right)<\varepsilon_0$，矛盾。因而证得$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$。对$x(t)<0$的情形同样可证。　　证毕。

推论　若将定理2中 ii) 改为

ii)。$p_i(t)\geqslant0$，$\lim_{t\to\infty}p_i(t)=0$，$p_i'(t)-q_i(t)\leqslant0$，$0\leqslant i\leqslant n$；对 $i\geqslant1$，当 $b_j—a_j\to\infty$时，有$\int_{a_j}^{b_j}(p_i'(s)-q_i(s))ds\to-\infty$；且或者$\frac{1}{2}p_0'(s)-q_0(t)\geqslant0$，或者$\int_{a_j}^{b_j}(\frac{1}{2}p_0'(s)-q_0(s))ds\to-\infty$，当 $b_j—a_j\to\infty$时，则(1)的所有非振动解及Z型解皆趋于0。

这只要注意到

$$\int_{a_j}^{b_j}\left[p_0(s)x(s)x'(s)+q_0(s)x(s)^2\right]ds=\frac{1}{2}(p_0(b_j)x(b_j)^2-p_0(a_j)x(a_j)^2)+\int_{a_j}^{b_j}(q_0(s)-\frac{1}{2}(p_0'(s))x(s)^2ds, \tag{6}$$

与定理 2 同样证法即可得此推论。

定理3　**设 i)**。$\int^{\infty}\frac{ds}{r(s)}<\infty$；**ii)** 对所有 i，$0\leqslant p_i(t)\leqslant B<\infty$；$p_i'(t)-q_i(t)\leqslant0$；且

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

有某一l，使$\int^{\infty}(q_l(s)-p_l'(s))ds=+\infty$；iii) 当$|x|$有界时，$|g_i(x)|$有界；则(1)的所有非振动解和Z型解或单调趋于某一有限极限，或趋于0。

证明 对(1)的非振动解$x(t)$，不妨设当$t>T$时，$x(t-\tau_i(t))>0$，则$g_i(x(t-\tau_i(t)))>0$。由(2)式，可得$r(t)x'(t)+\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))<A$。故 $x(t)-x(T)<A\int_T^t\frac{ds}{r(s)}<\infty$，即$x(t)$有界。设$x(t)\leqslant M$，从$T$到$t>T$积分(1)，得

$$r(t)x'(t)+\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))+\sum_{i=0}^{n}\int_T^t(q_i(s)-p_i'(s))g_i(x(s-\tau_i(s)))ds$$
$$=\int_T^t f(f)ds+C \tag{7}$$

a) 若有某一i，使$\int_T^{\infty}(q_i(s)-p_i'(s))g_i(x(s-\tau_i(s)))ds=\infty$，则由(7)式右边有界推得$r(t)x'(t)\to-\infty$。故$x(t)$单调下降趋于一有限极限。

b) 对所有i，都有(3)式成立，与前同样此时有$\varliminf_{t\to\infty}x(t)=0$。

若$\varlimsup_{t\to\infty}x(t)\geqslant2\varepsilon_o>0$，则可取定理2证明中同样的$a_j,T_j,b_j$。此时仍有(5)式成立。故有

$$\beta_j^2\leqslant\alpha_j\Big[\sum_{i=0}^{n}MBg_i(M)+M\sum_{i=0}^{n}\int_{a_j}^{b_j}(q_i(s)-p_i'(s))g_i(x(s-\tau_i(s)))ds$$
$$+\sum_{i=0}^{n}Bg_i(M)\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds+M\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds\Big].$$

令$G=\sum_{i=0}^{n}g_i(M)$，由(3)式，当j充分大，有

$$\sum_{i=0}^{n}\int_{a_j}^{b_j}(q_i(s)-p_i'(s))g_i(x(s-\tau_i(s)))ds+\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds<GB.$$ 故$\beta_j^2\leqslant2MGB\alpha_j+\alpha_jBG\beta_j$

即有 $\varepsilon_o\leqslant\beta_j\leqslant\frac{1}{2}(\alpha_jBG+\sqrt{\alpha_j^2B^2G^2+8MGB\alpha_j})$.

由i)。$\lim_{j\to\infty}\alpha_j=0$，$B$、$G$、$M$为常数，故有$\varepsilon_o=0$，即$x(t)\to0$。对$x(t)<0$同样可证。

定理4 设i) $\int^{\infty}\frac{1}{s(s)}ds<\infty$；ii)。对任意$i$，$\int^{\infty}|q_i(s)-p_i'(s)|ds<\infty$，$|p_i(t)|<B<\infty$；iii)当$|x|$充分大时，$|g_i(x)|\leqslant m|x|$，$m>0$为常数；则(1)的所有振动解趋于0。

证明 设$x(t)$是(1)的振动解，先证$x(t)$有界：

若无界，则有$a_j<b_j$，$x(a_j)=x(b_j)=0$。对$t\in[a_j,b_j]$，$x(t)$不变号，且当$t\leqslant b_j$，$|x(t)|\leqslant\max_{s\in[a_j,b_j]}|x(s)|=|x(T_j)|=M_j$。当$j\to\infty$时，$a_j\to\infty$，$M_j\to\infty$。

与定理2的证明中一样，此时有$2M_j\leqslant\beta_j$，且有(5)式成立。故有

$$\beta_j^2\leqslant\alpha_j\Big[mM_j^2\sum_{i=0}^{n}\int_{a_j}^{b_j}|q_i(s)-p_i'(s)|ds+BmM_j(n+1)\cdot\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds+M_j\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds\Big].$$

由ii)，当j充分大时，有

$$mM_j^2\sum_{i=0}^{n}\int_{a_j}^{b_j}|q_i(s)-p_i'(s)|ds+M_j\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds\leqslant M_j^2,$$

即 $\beta_j^2\leqslant\alpha_jM_j^2+\alpha_jBmM_j(n+1)\beta_j$。故

$$2M_j\leqslant\beta_j\leqslant\frac{m_j}{2}\Big[\alpha_jBm(n+1)+\sqrt{\alpha_j^2B^2m^2(n+1)^2+4\alpha_j}\Big]. \tag{8}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由i) $\lim\limits_{j\to\infty} a_j=0$。则(8)式右边$M_j$的系数趋于0。得到矛盾。故$x(t)$有界。

同样可证$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|x(t)|=0$。　　　　证毕。

注意到(5)式，与上面同样证明，我们还有：

定理5　若定理4中ii)改为：对$i\geqslant 1$，$\int^\infty |p_i'(s)-q_i(s)|ds>\infty$，$|p_i(t)|<B$，且或有$\frac{1}{2}p_0'(t)\geqslant q_0(t)$；或有$\int^\infty \left| q_0(s)-\frac{p_0'(s)}{2}\right|ds>\infty$；或满足$|p_0(t)|<B$，$\int^\infty |q_0(s)|ds<\infty$；其余条件不变，则(1)的所有振动解趋于0。

注1　定理1减弱了文[4]中条件而包含其结果；定理2包含文[9]定理4，减弱了文[5]定理4的条件，定理3包含文[9]定理2；定理4、定理5包含文[6]定理4.1和定理4.2，文[7]定理1、定理2和定理3，文[8]定理4和定理5。

注2　在定理3的条件下，是不能保证所有非振动解皆趋于0的，即使将条件ii)加强为：

ii)$'$。存在一个l，只要$b_j-a_j\to\infty$，就有$\int_{a_j}^{b_j}(q_l(s)-p_l'(s))ds\to\infty$，且对所有$i$，$p_i(t)\geqslant 0$有界，$p_i'(t)-q_i(t)\leqslant 0$。仍不能得出上述结论。例如

$$(e^t t^{\frac{1}{2}}x'(t))'+\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}x(t-\tau)=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}e^{\tau}e^{-t} \tag{9}$$

其中$\tau>0$为常数，(9)满足定理3条件且还满足ii)$'$。但有非振动解$x(t)=1+e^{-t}\not\to 0$。因此文[5]定理2的结论是不成立的。

下面我们举几个例。

例1　$x''(t)+tx'(t-\tau_1)+ax(t-\tau_1)+e^{-bt}x(t-\tau_2)=e^{-t}+(a-t)e^{-t+\tau_1}+e^{-(b+1)t+\tau_2}$，　(10)

其中$a>1$、b、τ_1、τ_2均为大于0的常数。(10)满足定理1条件，故其所有非振动解及Z型解皆趋于0。事实上，(10)有解$x(t)=e^{-t}\to 0$。

例2　$x''(t)-x(t)+t^{-3}x(t-\frac{\pi}{2})+e^{-t}x'(t-\pi)=f(t)$，　(11)

其中$f(t)=-2e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t-t^{-3}e^{-t+\frac{\pi}{2}}\cos t+e^{-2t+\pi}(\sin t-\cos t)$。

由于(11)等价于$(t^{\frac{3}{2}}x')'-\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}x'(t)-t^{\frac{3}{2}}x(t)+t^{-\frac{3}{2}}(t-\frac{\pi}{2})+t^{\frac{3}{2}}e^{-t}x'(t-\pi)=t^{\frac{3}{2}}f(t)$

$=\bar{f}(t)$，　(12)

而(12)满足定理5的条件，故(11)的所有振动解趋于0。实际上，(11)有振动解$x(t)=e^{-t}\sin t$

本文得到温立志副教授的热忱指导，特此致谢。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参考文献

[1] Graef, J. R., Takasi Kusano, Hiroshi Onose and Paul W. Spikes, On the Asymptotic Behavior of Oscillatory Solutions of Functional Differential Equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, 26(1983) 11—16.

[2] Grimmer, R., On nonoscillatory solutoins of a nonlinear differential equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* 34(1972), 118—120.

[3] Yoshiyuki Hiro, Asymptotic Property of Nonoscillatory Solutions of Second Order Differential Equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, 18(1975), 219—226.

[4] Micheel E. Hammett, Nonoscillatory properties of a nonlinear differential equation, *Proc, Amer. Math. Soc.*, 30(1971), 92—96.

[5] Singh, B., Asymptotic nature of nonoscillatory solutions of nth order retarded differential equations, *SIAM. J. Math. Anal.* 6(1975), 784—795.

[6] ——, Damped trajectories and slow oscillatory in forced lienard type Functional equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, 23(1980), 63—81.

[7] ——, Asymptotic vanishing oscillatory trajectories in second order retarded equations, *SIAM. J. Math. Anal.*, 7(1976), 37—44.

[8] Takasi Kusano and Hiroshi Onose, Asymptotic decay of oscillatory solutions of second order differential equations with forcing term, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 66(1977), 251—257.

[9] Singh, B. and Dahiya, R. S., On oscillation of second-order retarded equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 47(1974), 504—513.

[10] Takasi Kusano and Hiroshi Onose, Asymptotic Behaviour of Non- Oscillatory Solutions of Functional Differential Equations of Arbitrary Order, *J. London. Math. Soc.* (2)14(1976), 106—112.

Asymptotic Behavior of Solutions of a Class Second-order Functional differential Equations

Li kennan

(Hunan University)

Abstract

In this paper, We consider the asymptotic behavior of the equation

$$(r(t)x'(t))' + \sum_{i=0}^{n} p_i(t)g_i'(x(t-\tau_i(t))) + \sum_{i=0}^{n} q_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t))) = f(t).$$

Some sufficient conditions have been obtained which insure that all nonoscillatory or oscillatory solutions tend to zero as t tend to infinity.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.