第5卷 第3期
1985年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.6 No.3
July, 1985

正线性算子列在弱收敛意义下的Korovkin型定理*

邱福成

(暨南大学 数学系)

一、引 言

H.Bohman与P.P.Korovkin[4]在1953年建立了函数逼近论中著名的Bohman-Korovkin定理。这个定理可以表述如下：正线算子列T_n：$C_{[a,b]}\to C_{[a,b]}$，欲对任何$f(x)\in C_{[a,b]}$，皆有$T_n(f;\ x)\xrightarrow{S}f(x)$，当且仅当$T_n(t^i;\ x)\xrightarrow{s}x^i$，其中$i=0,1,2$。1966年，V.K.Dzjadyk[2]证明了$L^p_{[a,b]}$空间的Korovkin型定理：正线算子列$T_n$：$L^p_{[a,b]}\to L^p_{[a,b]}$，$(p\geqslant 1)$，欲对任何$f(x)\in L^p_{[a,b]}$，皆有$T_n(f;\ x)\xrightarrow{s}f(x)$，当且仅当$T_n(t^i;\ x)\xrightarrow{s}x^i$，$i=0,1,2$。1968年，D. E.Wulbert[3]所证明的$L^1_{(0,1)}$上的正线收缩算子列的Korovkin型定理，把一个条件中的强收敛减弱为弱收敛：正线收缩算子列T_n：$L^1_{(0,1)}\to L^1_{(0,1)}$，如$T_n(1;x)\xrightarrow{s}1$，$T_n(t;x)\xrightarrow{w}x$，则对任$f(x)\in L^1_{(0,1)}$，皆有$T_n(f;x)\xrightarrow{s}f(x)$。1976年，A. Meir[1]建立了$L^1_{(0,1)}$上的正线收缩算子列在弱收敛意义下的Korovkin型定理：正线收缩算子列T_n：$L^1_{(0,1)}\to L^1_{(0,1)}$，如$T_n(1;x)\xrightarrow{w}1$，$T_n(t;x)\xrightarrow{w}x$，则对任$f(x)\in L^1_{(0,1)}$，皆有$T_n(f;x)\xrightarrow{w}f(x)$。由A.Meir的定理，立刻可以导出D. E. Wulbert的定理。本文则证明了$L^p_{[a,b]}$空间$(p\geqslant 1)$上的一般正线算子列在弱收敛意义下的Korovkin型定理，且定理中的判别函数具有更一般的形式。

二、本文的结果

为了证明定理1，需要证明两个引理。其中引理1是本文作者[5]把积分形式或级数形式的Hölder不等式推广到正线算子而得出的广义Hölder不等式。

引理1 正线性算子A：$L_{[a,b]}\to L_{[a,b]}$，$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$，$f(x)\in L^p_{[a,b]}$，$h(x)\in L^q_{[a,b]}$，其中$1\leqslant p<\infty$。$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对几乎所有的$x\in[a,\ b]$，有$A(|fh|;\ x)\leqslant[A(|f|^p;x)]^{\frac{1}{p}}\cdot[A(|h|^q;\ x)]^{\frac{1}{q}}$，当$p>1$；$A(|fh|;x)\leqslant A(|f|;x)\operatorname*{esssup}_x|h(x)|$，当$p=1$。

证明 i) 设$p>1$，任意取定$x\in[a,\ b]$。

对任$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$$

取

$$\alpha=\frac{|f(t)|}{\{A(|f|^p;x)\}^{\frac{1}{p}}},\quad \beta=\frac{|h(t)|}{\{A(|h|^q;x)\}^{\frac{1}{q}}},$$

则

$$\frac{|f(t)h(t)|}{\{A(|f|^p;x)\}^{\frac{1}{p}}\{A(|h|^q;x)\}^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}\ \frac{|f(t)|^p}{A(|f|^p;x)}+\frac{1}{q}\ \frac{|h(t)|^q}{A(|h|^q;x)},$$

* 1983年5月26日收到。

据算子的正性及线性有
$$\frac{A(|fh|;x)}{\{A(|f|^p;x)\}^{\frac{1}{p}}\{A(|h|^q;x)\}^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

故
$$A(|fh|;x)\leqslant\{A(|f|^p;x)\}^{\frac{1}{p}}\{A(|h|^q;x)\}^{\frac{1}{q}}.$$

当x遍历$[a,b]$上几乎所有的点时，就得出第一个不等式。

ii) 当$p=1$时，第二个不等式是显然的。

引理2 正线性算子列$T_n: L^p_{[a,b]}\to L^p_{[a,b]}, p\geqslant 1, f(x)$为本质有界函数，如$T_n(1;x)\xrightarrow{w}1$，$T_n(f;x)\xrightarrow{w}f(x)$，$T_n(f^2;x)\xrightarrow{w}f^2(x)$，则

i) $T_n(|f(t)-f(x)|;x)\xrightarrow{w}0$；

ii) $T_n(f^r;x)\xrightarrow{w}f^r(x)$，$r$为任意自然数。

证明 设对几乎所有的$x\in[a,b]$，有$|f(x)|\leqslant M$，任取$\alpha(x)\in L^q_{[a,b]}$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有

i) $$\left|\int_a^b\alpha(x)T_n(|f(t)-f(x)|;x)dx\right|\leqslant\int_a^b|\alpha(x)|T_n(|f(t)-f(x)|;x)dx$$
$$\leqslant\int_a^b|\alpha(x)|[T_n(1;x)]^{\frac{1}{2}}[T_n(|f(t)-f(x)|^2;x)]^{\frac{1}{2}}dx$$
$$\leqslant\left[\int_a^b|\alpha(x)|T_n(1;x)dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b|\alpha(x)|T_n(|f(t)-f(x)|^2;x)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由条件，知存在常数$k>0$，使
$$\left[\int_a^b|\alpha(x)|T_n(1;x)dx\right]^{\frac{1}{2}}<k$$

又 $$\int_a^b|\alpha(x)|T_n(|f(t)-f(x)|^2;x)dx$$
$$=\int_a^b|\alpha(x)|[T_n(f^2;x)-f^2(x)]dx+\int_a^b|\alpha(x)|f^2(x)[T_n(1;x)-1]dx$$
$$+\int_a^b|\alpha(x)|\cdot 2f(x)[f(x)-T_n(f;x)]dx\longrightarrow 0$$

由上述证明，知$T_n(|f(t)-f(x)|;x)\xrightarrow{w}0$。

ii) $$\left|\int_a^b\alpha(x)T_n(f^r;x)dx-\int_a^b\alpha(x)f^r(x)dx\right|$$
$$\leqslant\int_a^b|\alpha(x)|T_n(|f^r(t)-f^r(x)|;x)dx+\left|\int_a^b\alpha(x)f^r(x)[T_n(1;x)-1]dx\right|$$
$$\leqslant\int_a^b|\alpha(x)|\cdot r\cdot M^{r-1}T_n(|f(t)-f(x)|;x)dx$$
$$+\left|\int_a^b\alpha(x)f^r(x)[T_n(1;x)-1]dx\right|\longrightarrow 0$$

故
$$T_n(f^r;x)\xrightarrow{w}f^r(x).$$

定理1 正线性算子列T_n: $L^p_{[a,b]}\to L^p_{[a,b]}$，$p\geqslant 1$；如

i) $\|T_n\|<k$，常数$k>0$与n无关；

ii) $T_n(1;x)\xrightarrow{w}1$；

iii）存在本质有界函数 $f(x)$，满足 $G=\mathrm{span}\{1,f,f^2\cdots\cdots\}$，

$\overline{G}=L^p_{[a,b]}$，且$T_n(f;x)\xrightarrow{w}f(x)$，$T_n(f^2;x)\xrightarrow{w}f^2(x)$，

则对任 $F(x)\in L^p_{[a,b]}$，皆有 $T_n(F;x)\xrightarrow{w}F(x)$。

证明　任取$\alpha(x)\in L^q_{[a,b]}$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

记线性泛函列　　$P_n(f)=\int_a^b\alpha(x)T_n(f;x)dx$,

又记线性泛函　　$P(f)=\int_a^b\alpha(x)f(x)dx$,

则

$$|P_n(f)|\leqslant\|\alpha(x)\|_{L^q}\|T_n(f;x)\|_{L^p}$$
$$\leqslant\|\alpha(x)\|_{L^q}\|T_n\|\,\|f\|_{L^p}.$$

故线性泛函列 $P_n(f)$ 的范数是一致有界的。

又对G中的任一元$g(x)=\sum\limits_{r=0}^{m}a_if^r(x)$，有

$$P_n(g)=P_n\Big(\sum_{r=0}^{m}a_if^r(x)\Big)=\sum_{r=0}^{m}a_iP_n(f^r)\longrightarrow\sum_{r=0}^{m}a_iP(f^r)=P\Big(\sum_{r=0}^{m}a_if^r(x)\Big)=P(g)$$

故对任 $F(x)\in L^p_{[a,b]}$，有 $P_n(F)\longrightarrow P(F)$，

由 $\alpha(x)$ 的任意性，即 $T_n(F;x)\xrightarrow{w}F(x)$。

在定理 1 中，特别地取 $f(x)=x$，定理就成为最常见的 Korovkin 型定理的形式。如果是 $L^2_{[a,b]}$ 空间，例如还可以取 $f(x)=x^\lambda$，$(\lambda>0)$，因为据 Müntz 定理，$\mathrm{span}\{1,x^\lambda,{}^2x^\lambda\cdots\}$ 在 $L^2_{[0,1]}$ 中稠密。

定理 1 的条件的形式可以稍加改变，从而得出下面的定理。

定理 2　正线性算子列 T_n：$L^p_{[a,b]}\to L^p_{[a,b]}$，$p\geqslant1$；如

i）$\|T_n\|<k$，常数 $k>0$ 与 n 无关；

ii）$T_n(1;x)\xrightarrow{w}1$；

iii）存在本质有界函数 $f(x)$，满足 $G=\mathrm{span}\{1,f,f^2,\cdots\cdots\}$，$\overline{G}=L^p_{[a,b]}$，且存在某一固定的$s(1\leqslant s<\infty)$ 使 $T_n(|f(t)-f(x)|^s;x)\xrightarrow{w}0$。

则对任 $F(x)\in L^p_{[a,b]}$，皆有 $T_n(F;x)\xrightarrow{w}F(x)$。

证明　任取 $\alpha(x)\in L^q_{[a,b]}$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

又取$r=\frac{s}{s+1}$，则

$$\left|\int_a^b\alpha(x)T_n(|f(t)-f(x)|;x)dx\right|$$
$$\leqslant\int_a^b|\alpha(x)|\,[T_n(1;x)]^{\frac{1}{r}}[T_n(|f(t)-f(x)|^s;x)]^{\frac{1}{s}}dx$$
$$\leqslant\Big[\int_a^b|\alpha(x)|\,T_n(1;x)dx\Big]^{\frac{1}{r}}\Big[\int_a^b|\alpha(x)|\,T_n(|f(t)-f(x)|^s;x)dx\Big]^{\frac{1}{s}}\longrightarrow0$$

即 $T_n(|f(t)-f(x)|;x)\xrightarrow{w}0$。仿引理2的证明，可推得 $T_n(f^r;x)\xrightarrow{w}f^r(x)$，其中 r 为任意自然数。再仿定理 1 的证明，可推出本定理的结论。

利用定理1的结果，可以把引言中所述的D.E.Wulbert[3]的关于正线性收缩算子列的定理，类似地推广到$L^1_{[a,b]}$上的一般正线性算子列上来。

定理3 正线性算子列T_n: $L^1_{[a,b]}\to L^1_{[a,b]}$，如

i) $\|T_n\|<k$，常数$k>0$与n无关；

ii) $T_n(1;x)\xrightarrow{s}1$；

iii) 存在本质有界函数$f(x)$，满足$G=\text{span}\{1,f,f^2,\cdots\cdots\}$，$\bar{G}=L^p_{[a,b]}$，且$T_n(f;x)\xrightarrow{w}f(x)$，$T_n(f^2;x)\xrightarrow{w}f^2(x)$。

则对任$F(x)\in L^1_{[a,b]}$，有$T_n(F;x)\xrightarrow{s}F(x)$。

证明 因$T_n(1;x)\xrightarrow{s}1$，故$T_n(1;x)\xrightarrow{w}1$，

据定理1，对任$F(x)\in L^1_{[a,b]}$，有$T_n(F;x)\xrightarrow{w}F(x)$；设$E$为$[a,b]$上的任一可测子集，$CE$为$E$的关于$[a,b]$的补集；$\chi_E$，$\chi_{CE}$分别表示集$E$、$CE$的特征函数。则在$[a,b]$上，恒有$\chi_E\equiv 1-\chi_{CE}$，$\chi_E\cdot\chi_{CE}\equiv 0$。由$T_n(\chi_E;x)-\chi_E=\chi_E[T_n(1;x)-1]-\chi_E T_n(\chi_{CE};x)+\chi_{CE}T_n(\chi_E;x)$，有$\|T_n(\chi_E;x)-\chi_E\|_L\leqslant\|\chi_E[T_n(1;x)-1]\|_L+\|\chi_E T_n(\chi_{CE};x)\|_L+\|\chi_{CE}T_n(\chi_E;x)\|_L$

而$\|\chi_E[T_n(1;x)-1]\|_L\leqslant\|T_n(1;x)-1\|_L\to 0$，

$$\|\chi_E T_n(\chi_{CE};x)\|_L\longrightarrow\int_a^b\chi_E\chi_{CE}dx=0,$$

$$\|\chi_{CE}T_n(\chi_E;x)\|_L\longrightarrow\int_a^b\chi_{CE}\chi_E dx=0.$$

故$\|T_n(\chi_E;x)-\chi_E\|_L\longrightarrow 0$。就是说，对$[a,b]$上的任一可测子集$E$的特征函数$\chi_E$，皆有$T_n(\chi_E;x)\xrightarrow{s}\chi_E$。而$[a,b]$上的全体可测子集所对应的全体特征函数$\{\chi_E\}$所张成的线性苞在$L^1_{[a,b]}$上稠密，所以，对任$F(x)\in L^1_{[a,b]}$，皆有$T_n(F;x)\xrightarrow{s}F(x)$。

参考文献

[1] Meir, A., A Korovkin type theorem on weak convergence, *Proc. Amer. Math. Soc.* 59(1976), no.1, 72—74.

[2] Дзядык, В. К., О приближении функций линейными положительными операторами и сингулярными интегралами, Матем. СБ., Т. 170(112), (1966).508—517.

[3] Wulbert, D. E., Convergence of operators and Korovkin's theorem, *J. Approximation Theory*, 1(1868), 381—390.

[4] 帕·彼·柯罗夫金，线性算子与逼近论，1960，高等教育出版社。

[5] 邱福成，关于正线性算子的Korovkin定理的一个推广，暨南大学学报(理医版) 1(1983)。