第5卷 第3期
1985年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.3
July, 1985

一个特殊的数码排列问题——镶符问题*

胡著信

（南京化工学院）

镶符问题是一个较古老的中国组合数学问题（又称移棋问题、移珙问题等），其起源可能和易卦有关．清代学者褚人获[1]、俞曲园[2]和后来的中算史家李俨等[3][4]都研究过这个问题．从现代数学观点来看，它是一个在某种特定的组合规则之下，将任意序列或某种特定序列重新组合为“成组序列”的问题[5]．本文提出遍历性、键、极径等概念，引进一套简洁有效的符号、术语和一系列严格的定义，使这个问题在理论上已具系统化，并得出了一些新的结果．作者对南京大学莫绍揆教授的支持深表感谢，

给定 $X=(x_1,\cdots,x_s)\in R^s$，此处 $s=\sum\limits_{i=1}^{t}n_i+m$，$m>0$，$n_i>0$，对 $i=1,\cdots,t$，若 X 同时满足以下二条件：

（1）X 恰有 m 个分量为0：$x_f=x_{f+1}=\cdots=x_{f+m-1}=0$，此处 $f=\min\limits_{x_i=0}\{i\}$；

（2）X 恰有 n_i 个分量为 i，对 $i=1,\cdots,t$；则称 X 是 $\{n_1,\cdots,n_t,m\}$-可镶的．

我们记 $\mathrm{NR}(n_1,\cdots,n_t,m)=\{X|X$ 是 $\{n_1,\cdots,n_t,m\}$-可镶的$\}$．

本文中我们以后提到的 X 都是在 $\mathrm{NR}(n_1,\cdots,n_t,m)$ 中的．

定义1 若 X 同时满足以下二条件：

（1）$x_1=x_2=\cdots=x_m=0$，或 $x_{s-m+1}=x_{s-m+2}=\cdots=x_s=0$；（2）从 $x_i=x_j\ (i\leqslant j)$，有 $x_i=x_{i+1}=\cdots=x_j$，

则称 X 是一个北极点．

定义2 若 X 同时满足以下二条件：

（1）$x_1=x_2=\cdots=x_m=0$，或 $x_{s-m+1}=x_{s-m+2}=\cdots=x_s=0$；

（2）从 $x_i\cdot x_{i+1}\neq0$，有 $x_i\neq x_{i+1}$；

则称 X 是一个南极点．

我们记

$\mathrm{NP}(n_1,\cdots,n_t,m)=\{x|x\in\mathrm{NR}(n_1,\cdots,n_t,m)$，$x$ 是北极点$\}$，

$\mathrm{SP}(n_1,\cdots,n_t,m)=\{x|x\in\mathrm{NR}(n_1,\cdots,n_t,m)$，$x$ 是南极点$\}$．

定义3 镶变 T_k 是 $\mathrm{NR}(n_1,\cdots,n_t,m)$ 中的一个变换，其定义如下：

*1983年10月17日收到．

(1) $k>0$。设 $f(X)=\min\limits_{x_i=0}\{i\}$，若 $f(X)>m+k$，则 X 可写成 $X=(X_0X_1X_2(^m_0)X_3)$，此处 $X_0=(x_1,\cdots,x_{f-k-m-1})$，$X_1=(x_{f-k-m},\cdots,x_{f-k-1})$，$X_2=(x_{f-k},\cdots,x_{f-1})$，$(^m_0)=(\overbrace{0,\cdots,0}^{m})$，$X_3=(x_{f+m},\cdots,x_s)$。

T_k 定义为

$$T_kX=\begin{cases}T_k(X_0X_1X_2(^m_0)X_3)=(X_0(^m_0)X_2X_1X_3), & \text{当} f(X)>m+k;\\ X & \text{当} f(X)\leqslant m+k.\end{cases}$$

(2) $k<0$。设 $f(X)=\min\limits_{x_i=0}\{i\}$，若 $f(X)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{t}n_i-m+1-|k|\ (=S-2m+1-|k|)$，则 X 可写成 $X=(X_0(^m_0)X_2X_1X_3)$，其中 $X_0=(x_1,\cdots,x_{f-1})$，$(^m_0)=(\overbrace{0,\cdots,0}^{m})$，$X_2=(x_{f+m},\cdots,x_{f+m+|k|-1})$，$X_1=(X_{f+m+|k|},\cdots,x_{f+2m+|k|-1})$，$X_3=(x_{f+2m+|k|},\cdots,x_s)$。

T_k 定义为

$$T_kX=\begin{cases}T_k(X_0(^m_0)X_2X_1X_3)=(X_0X_1X_2(^m_0)X_3), & \text{当} f(X)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{t}n_i-m+1-|k|,\\ X & ,\text{当} f(X)>\sum\limits_{i=1}^{t}n_i-m+1-|k|.\end{cases}$$

(3) $k=0$。T_k 定义为 $T_kX=X$。

两个镶变 T_i 和 T_j 的乘积定义为 $(T_jT_i)X=T_j(T_iX)$，j 个镶变 $T_{i1},\cdots,T_{ij}$ 的乘积定义为 $(T_{ij}\cdots T_{i1})X=T_{ij}((T_{ij-1}\cdots T_{i1})X)$。

对于 X 和 $Y\in NR(n_1,\cdots,n_t,m)$，若存在若干个镶变，比如 $T_{i1},\cdots,T_{ij}$，使得 $(T_{ij}\cdots T_{i1})X=Y$，则记

$$X\longrightarrow Y\ (\text{或} X\xrightarrow{T_{ij}\cdots T_{i1}}Y);\ \text{否则，记} X\nrightarrow Y.$$

我们记

$$D(X,Y)=\begin{cases}\min\{j\,|\,(T_{ij}\cdots T_{i1})X=Y\}, & \text{若} X\to Y \text{但} X\neq Y,\\ 0 & \text{若} X=Y,\\ \infty & \text{若} X\nrightarrow Y;\end{cases}$$

及

$$r(n_1,\cdots,n_t,m)=\min\left\{D(X,Y)\ \middle|\begin{array}{l}X\in NP(n_1,\cdots,n_t,m),\\ Y\in SP(n_1,\cdots,n_t,m),\end{array}\right\},$$ 当 $NP(n_1,\cdots n_t,m)$ 和 $SP(n_1\cdots n_t,m)$ 都存在时。

本文我们得出如下结果：

定理1 当 $\min\{n_1,\cdots,n_t\}\geqslant\min\left\{2m,\ \dfrac{4m+10}{3}\right\}$ 时，对 $NR(n_1,\cdots,n_t,m)$ 中的任何两个点 X 和 Y 都有 $X\to Y$。

定理2 $r(n,n,m)\geqslant n$，当 $n\geqslant2$ 时。

定理3 $r(n,n,1)=n$，当 $n\geqslant3$ 时。

定理4 $r(n,n,2)=n$，当 $n\geqslant4$ 时。

定理5 $r(4,4,3)=4$；$r(n,n,3)=n$，当 $n\equiv1$ (mod2 且 $n\geqslant3$ 时；$n\leqslant r(n,n,3)\leqslant n+1$，当 $n\equiv0$ (mod2) 且 $n\geqslant6$ 时。

例1. $(1,2,1,2,1,2,0)\xrightarrow{T_4}(1,0,1,2,1,2,2)$

$\xrightarrow{T_{-2}}(1,1,1,2,0,2,2,)\xrightarrow{T_{-1}}(1,1,1,2,2,2,0)$.

故　$(1,2,1,2,1,2,0)\xrightarrow{T_{-1}T_{-2}T_4}(1,1,1,2,2,2,0)$

或　$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ (1,2) & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{T_{-1}T_{-2}T_4}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

例2. $(1,2,1,2,1,2,1,2,0,0)\xrightarrow{T_5}(1,0,0,2,1,2,1,2,2,)$

$\xrightarrow{T_{-2}}(1,1,2,2,0,0,1,2,2,1)\xrightarrow{T_{-1}}(1,1,2,2,2,2,1,0,0,1)$

$\xrightarrow{T_5}(0,0,2,2,2,2,1,1,1,1,)$.

故　$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ (1,2) & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{T_5T_{-1}T_{-2}T_5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

例3　$(1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,0,0,0)$

$\xrightarrow{T_4}(1,2,1,0,0,0,1,2,1,2,2,1,2)$

$\xrightarrow{T_{-3}}(1,2,1,2,2,1,1,2,1,0,0,0,2)$

$\xrightarrow{T_4}(1,2,0,0,0,1,1,2,1,1,2,2,2)$

$\xrightarrow{T_{-1}}(1,2,2,1,1,1,1,0,0,0,2,2,2)$

$\xrightarrow{T_4}(0,0,0,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2)$.

故　$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ (1,2) & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{T_4T_{-3}T_4T_{-1}T_4}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

例4　$(1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,0,0,0,0)$

$\xrightarrow{T_5}(1,2,0,0,0,0,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2)$

$\xrightarrow{T_{-3}}(1,2,2,1,2,1,1,2,1,2,1,0,0,0,0,2)$

$\xrightarrow{T_5}(1,2,2,1,0,0,0,0,1,2,1,2,1,1,2,2)$

$\xrightarrow{T_{-1}}(1,2,2,1,1,2,1,1,1,2,0,0,0,0,2,2)$

$\xrightarrow{T_4}(1,2,0,0,0,0,1,1,1,2,2,1,1,2,2,2)$

$\xrightarrow{T_{-3}}(1,2,2,2,1,1,1,1,1,0,0,0,0,2,2,2)$

$\xrightarrow{T_5}(0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2)$.

故　$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ (1,2) & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{T_5T_{-3}T_4T_{-1}T_5T_{-3}T_5}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

参 考 文 献

[1] 褚人获，移碁相间，《坚瓠集》，五集卷一，十二～十三.

[2] 俞樾，移棋相间法，《春在堂随笔》卷一，十～十一.

[3] 赵缭，李俨，黑白交错图.《学艺》，十二卷十号（1932）53～64.

[4] 杨肆，移棋相间法，《理科期刊》（1934）90～104.

[5] 朱永津，朱若鹏，任意序列重新组合为某种有序序列的研究，《中国科学》（A辑），1983，2、119～127.