第5卷 第3期
1985年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.3
July, 1985

Russell悖论的变形与ZFC的正则公理

——对无根基悖论和多值逻辑悖论的评析与介绍*

朱梧槚　　肖奚安

（南京大学）　（空军气象学院）

§0 引　言

沈有鼎先生在[1]中构造了几个著名的悖论，即所谓'无根基和有根基悖论'、'循环与非循环悖论'和'n循环与非n循环悖论'。我们首先用通俗的自然语言把这几个悖论陈述出来，再介绍ZFC系统中正则公理AxR的几种等价形式，然后利用AxR的这些等价命题对上述三个悖论进行分析，即可看出它们都是变了形的Russell悖论，并且很自然地得到结论：Russell悖论和上述三个悖论中所构造的集合，皆不在ZFC系统中，因而这些悖论将不在ZFC系统中出现。

莫绍揆先生在[2]中论证并指出，如果保持概括原则，则Łukasiewicz有穷值逻辑系统的展开对于悖论的排除来说，将是无济于事的。这一工作很著名也很重要，因为自从集合论悖论出现之后，经过仔细分析，可以归结到如下四件事不能同时成立：

(1)　$x\notin x$是一个条件（含x的语句），

(2)　任给一条件$\phi(x)$决定一集A，即

$$x\in A\longleftrightarrow\phi(x),$$

(3)　集合为个体之一，因而x处均可代以A，

(4)　$P\longleftrightarrow\neg p$为一矛盾。

否则，若设(1)、(2)、(3)、(4)同时成立，则由(1)知，我们可取$x\notin x$为一个条件$\phi(x)$，由(2)知有A使$x\in A\longleftrightarrow x\notin x$，由(3)知有$A\in A\longleftrightarrow A\notin A$，由(4)必得承认$A\in A\longleftrightarrow A\notin A$为一矛盾。

这说明(1)、(2)、(3)、(4)中至少要否定一条。Russell从否定(1)(即否定$x\notin x$得以作为造集谓词)出发展开他的类型论，Zermelo-Fraenkel基于否定(2)而构造ZFC集合论公理系统，Bernays-Gödel在否定(3)的基础上形成他们的BG集合论公理系统，Бошвар以否定(4)为起点发展他的多值逻辑。这里要注意上述(2)即为概括原则，因之否定(4)而保留(2)，即为承认概括原则前提下展开多值逻辑系统。类型论、ZFC系统和BG系统都能使已经发生的逻辑、数学悖论被排除，这三个系统的共同点之一就是直接或简接地限制概括原则造集的任意性，人们原先认为完全保留概括原则而展开多值逻辑也能排除悖论。但是莫绍揆先生在[2]中具体地证明了Łukasiewicz有穷值逻辑系统$Ł_n$($3\leqslant n<\omega$)中必定包含悖论。但由于[2]的行文采用了为多数人所不熟悉的前置符号系，以致人们对此重要工作，知其

* 1983年3月12日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

然者很多，知其所以然者甚少，因此，我们也在本文中以通俗的自然语言和通用的中置符号系，把多值逻辑悖论作一介绍，并经分析指出，[2]中所构造的悖论所用的造集谓词的逻辑真值表达式，也是Russell悖论之造集谓词的逻辑真值表达式的一个推广形式。

§1 对无根基悖论的评析和介绍

定义 一集x叫做无根基的集，如果存在$x_i(i=1,2\cdots,n,\cdots)$使有

$$\cdots\cdots\in x_n\in x_{n-1}\in\cdots\in x_2\in x_1\in x,$$

否则，称x为有根基的集。

因之，任给一集G，则G要么是有根基集，要么是无根基集。

今按概括原则构造

$$S=\{x|x\text{为有根基集}\}.$$

试问S是有根基集还是无根基集？若设S为有根基集，则按S的构造可知必有$S\in S$，于是存在$x_i=S(i=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$而使有

$$\cdots\cdots\in S\in S\in\cdots\in S\in S\in S.$$

按定义，S应为无根基集。反之，若设S为无根基集，则按定义，存在$x_i(i=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$而使有

$$\cdots\cdots\in x_n\in x_{n-1}\in\cdots\in x_2\in x_1\in S.$$

由$x_1\in S$和S的构造知x_1为一有根基集，另方面，令$X_i=x_{i+1}(i=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$，则有

$$\cdots\cdots\in X_n\in X_{n-1}\in\cdots\in X_2\in X_1\in x_1,$$

这表示x_1为无根基集，矛盾。故原设不能成立，即S应为有根基集。那条路都说不通，故为一悖论。可称为无根基和有根基的悖论。

定义 一集x_1叫做循环集，如果存在$x_2,x_3,\cdots,x_n$（n为不固定的任一正整数变量）使有

$$x_1\in x_2\in x_3\in\cdots\in x_n\in x_1,$$

否则称x_1为非循环集。

于是任一集G要么是循环集，要么是非循环集，但按概括原则可构造集

$$S=\{x|x\text{为非循环集}\},$$

试问S是循环集还是非循环集？

若设S为循环集，则必存在$x_1,x_2\cdots,x_n$使有

$$S\in x_1\in x_2\in\cdots\in x_n\in S.$$

于是一方面由$x_n\in S$而知x_n为一非循环集，另方面，却因

$$x_n\in S\in x_1\in x_2\in\cdots\in x_{n-1}\in x_n$$

而知x_n为一循环集，矛盾。这表明原设S为循环集一事不真，即S为非循环集。但若设S为非循环集时，则按S的构造就有$S\in S$，于是

$$S\in S\in\cdots\cdots\in S,$$

故S为循环集，那种说法都不通。故为一悖论，可称为循环和非循环的悖论。

定义 一集x_1是n循环集，如果存在某一固定的正整数n，使有$x_1\in x_2\in\cdots\in x_n\in x_1$，否则称$x_1$为非$n$循环集。

完全类似地讨论集

$$S=\{x|x\text{为非}n\text{循环集}\},$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

即可知仍会产生悖论。

显然 n 循环集不过是循环集之一特殊情形。另一方面，若设 x_1 为一循环集，则利用

$$x_n \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n,$$

而可无限制地重复该循环而获

$$\cdots\cdots \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in \cdots \in x_n \in x_1,$$

于是 x_1 是无根基集，故循环集是无根基集的特殊情形。不妨用如下的记号来表明上述一种为另一种特殊情形的含义：

$$n\text{循环} \subset \text{循环} \subset \text{无根基}.$$

同时，易见如下一些情形为真：

(a)　n 循环 $\subset 2n$ 循环 $\not\subset 3n$ 循环。

(b)　n 循环 $\subset 3n$ 循环，　n 循环 $\subset 4n$ 循环，等等。

(c)　1循环 $\subset n$ 循环 $\subset$ 循环 $\subset$ 无根基。

如所知，ZFC系统中的正则公理的下述三种表述形式都是互相等价的。

AxR　每个非空集合 A 都有成员 x，它与 A 没有公共元素；亦即

$$\forall_A(A \neq \emptyset \rightarrow \exists_x(x \in A \& x \cap A = \emptyset)).$$

AxR′　每个非空集合 A 都有 $\in$ 关系的最小元，亦即 $\in$ 关系是良基的。

AxR″　不存在如下的无穷串：

$$\cdots\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_2 \in x_1.$$

现在我们在ZFC系统中证明如下一些定理：

定理1　AxR, AxR′, AxR″ 三者是互相等价的，亦即可有 AxR ⇒ AxR′ ⇒ AxR″ ⇒ AxR.

证明　AxR ⇒ AxR′。用反证法，设 AxR′ 不真，即存在一非空集合 $A \neq \emptyset$，在 A 中没有 $\in$ 关系的最小元。因之对每个 $x \in A$，总存在 $y \in A \& y \in x$，故 $y \in x \cap A$，这表明对于 $A \neq \emptyset$ 的任何成员 x 都有 $x \cap A \neq \emptyset$，矛盾于AxR。

AxR′ ⇒ AxR″，事实上，若设有

$$\cdots\cdots \in x_n \in \cdots\cdots \in x_2 \in x_1,$$

则由ZFC中的无穷公理和代换公理，即可构作集合

$$A = \{x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_n, \cdots\}.$$

因对 A 中任何 x_i 总有 $x_{i+1} \in A \& x_{i+1} \in x_i$，故非空集合 A 没有 $\in$ 关系的最小元，矛盾于 AxR′。

AxR″ ⇒ AxR。事实上，若设AxR不成立，则存在一个非空集合 A_o，对于 A_o 的每个成员 x 总有 $x \cap A_o \neq \emptyset$。今由ZFC中之选择公理，可从 A_o 中选出一个 x_1，但因 $x_1 \cap A_o \neq \emptyset$，故又可选出 x_2 使有 $x_2 \in x_1 \cap A_o$，因为 $x_2 \in A_o$，$x_2 \cap A_0 \neq \emptyset$，再选出 x_3 而有 $x_3 \in x_2 \cap A_o$ 等等，以此类推下去便有

$$\cdots\cdots \in x_n \in \cdots\cdots \in x_2 \in x_1.$$

从而矛盾于AxR″。证毕。

定理2　ZFC 系统中不存在这样的集 X，使有 $\mathscr{P}(X) \subseteq X$。其中 $\mathscr{P}(X)$ 表示 X 的幂集。[5]

证明　设ZFC系统中存在集 X，使有 $\mathscr{P}(X) \subseteq X$，则由ZFC的子集公理可构造集合

$$S = \{x \mid x \in X \& x \notin x\}.$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

显然$S\subseteq X$，故$S\in\mathscr{P}(X)$，由设而知$S\in X\cdots(*)$。

现问S具有性质$S\in S$还是具有性质$S\notin S$，设$S\in S$，则有$S\in X\&S\notin S$，故$S\notin S$。再设$S\notin S$，则联合$(*)$便有$S\in X\&S\notin S$，于是$S\in S$，两种说法都矛盾，故原设不真。证毕。

定理3　在ZFC系统中，一切集合所组成的'集合'E不是集合。[5]

证明　假设E是ZFC系统中的集合，则由ZFC之幂集公理知$\mathscr{P}(E)$是ZFC的集，但由E的定义知$\mathscr{P}(E)\subseteq E$，矛盾于定理2，证毕。

由定理1可直接推得下列各点为真：

(1)　ZFC系统中任何集都是有根基集。否则矛盾于AxR″。

(2)　ZFC系统中任何集都是非循环集。因为循环$\subset$无根据。

(3)　ZFC系统中任何集都是非n循环集。因为n循环$\subset$循环。

(4)　ZFC系统中任何集x都满足$x\notin x$。否则x为1循环，但1循环$\subset n$循环。

由定理3和以上(1)——(4)直接知下列四个'集合'不是ZFC系统中的集合。

1. $\{x|x$为有根基集$\}$。

2. $\{x|x$为非循环集$\}$。

3. $\{x|x$为非n循环集$\}$。

4. $\{x|x\notin x\}$。

由此可知Russell悖论与前述三个悖论均不会在ZFC系统中出现。同时可见这三个悖论都不过是变了形的Russell悖论，因为三者在实际上只是将Russell悖论的非1循环造集谓词$x\notin x$分别扩张为n循环、非循环和非无穷串(即有根基)的造集谓词。而所有这些造集谓词的共同特点是：在某些自然的约束之下，ZFC系统中所有的集合都满足该谓词。

§2　对多值逻辑悖论的评析与介绍

在本节中，我们将按下述三个步骤评析和介绍多值逻辑悖论：第一步指出在满足某些条件的系统中一定包含悖论，并指出所构造的悖论也是变了形的Russell悖论，因为所构造的悖论的造集谓词的逻辑真值表达式，正是Russell悖论的造集谓词的逻辑真值表达式的一种推广形式。第二步指出Łukasiewicz的有穷值逻辑系统$Ł_n(3\leqslant n<\omega)$正是第一步中所说的那种满足这些条件的系统，因由$Ł_n(3\leqslant n<\omega)$中一定包含悖论。第三步指出无穷值逻辑系统$Ł_{\aleph_0}$却不是第一步中所说的那种满足这些条件的系统，因此仍用第一步中那种构造悖论的办法不能断定$Ł_{\aleph_0}$系统中是否存在悖论。

我们规定蕴含词$\rightarrow$指的是满足下述推理规则的逻辑联接词：

由p及$p\rightarrow q$，可推得q。

又$(p\rightarrow)^n q$是一种简记，其递归定义为：

$$(p\rightarrow)^1 q\quad 指\quad p\rightarrow q,$$

$$(p\rightarrow)^{n+1} q\quad 指\quad p\rightarrow[(p\rightarrow)^n q].$$

设p是命题变元，由概括原则，可构造集合：

$$a_n=\{x|((x\in x)\rightarrow)^n p\}.$$

此外，规则(A_n)指：

$$由(p\rightarrow)^{n+1}q可得(p\rightarrow)^n q.$$

现在我们来证明如下一些定理：

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

定理1　如果一个系统中有$p\to p$，(A_n)和a_n，则此系统一定包含悖论[2]。

证明　根据集合a_n的构造和定义可知$x\in a_n$与$((x\in x)\to)^n p$是完全相同的，在x处代以a_n，则$a_n\in a_n$与$((a_n\in a_n)\to)^n p$是完全相同的，由于系统中有$p\to p$，这表示相同的谓词可以互相蕴含，于是：

$$\text{Ⅰ.}\quad (a_n\in a_n)\to((a_n\in a_n)\to)^n p,$$

$$\text{Ⅱ.}\quad ((a^n\in a^n)\to)^n p\to(a_n\in a_n).$$

由$(p\to)^n q$的递归定义知Ⅰ就是

$$((a_n\in a_n)\to)^{n+1}p.$$

再由规则(A_n)而有

$$\text{Ⅲ.}\quad ((a_n\in a_n)\to)^n p.$$

于是由Ⅱ及Ⅲ，按$\to$的推理规则得：

$$\text{Ⅳ.}\quad a_n\in a_n.$$

再由Ⅲ及Ⅳ，按简记$(p\to)^n q$的意义，连续使用$\to$的推理规则n次便得p，但p是一个命题变元，可代以任何逻辑真值，故为一悖论，证毕。

我们已知Russell悖论的造集谓词为$x\notin x$，今以$\perp$表示'假'，那么$x\notin x$等价于$(x\in x)\to\perp$。从而显见定理1中所构造的悖论，无非是将造集谓词$(x\in x)\to\perp$扩张改造为如下的表达式：

$$(x\in x)\to((x\in x)\to(\cdots\to((x\in x)\to p)\cdots)).$$

所以定理1中所说的悖论也是一个变了形的Russell悖论。

Łukasiewicz的有穷值逻辑系统$Ł_n(3\leqslant n<\omega)$指的是命题的逻辑真值取如下n个值：

$$0,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-1},\ \cdots\frac{n-2}{n-1},\ 1,$$

而$p\to q$的真值为$\min(1,\ 1-p+q)$的逻辑系统。其中p、q也表示命题p、q之真值。现在我们首先用数学归纳法往证下式为真：

$$(*)\quad (\alpha\to)^n\beta=\min(1,\ n(1-\alpha)+\beta).$$

证明　**奠基**。当$n=1$时就是$Ł_n$中的蕴含定义。

归纳　设有$(\alpha\to)^n\beta=\min(1,\ n(1-\alpha)+\beta)$，往证$(\alpha\to)^{n+1}\beta=\min(1,\ (n+1)(1-\alpha)+\beta)$。事实上，

$$(\Delta)\quad (\alpha\to)^{n+1}\beta=\alpha\to[(\alpha\to)^n\beta]=\min(1,\ 1-\alpha+\min(1,\ n(1-\alpha)+\beta)).$$

当$n(1-\alpha)+\beta\geqslant1$时，因$0\leqslant\alpha\leqslant1$，故$1-\alpha\geqslant0$，这表明$n(1-\alpha)+\beta+(1-\alpha)\geqslant n(1-\alpha)+\beta\geqslant1$，因此即有

$$\min(1,\ 1-\alpha+\min(1,\ n(1-\alpha)+\beta))=\min(1,\ 1-\alpha+1)=1;$$

$$\min(1,\ (n+1)(1-\alpha)+\beta)=\min(1,\ n(1-\alpha)+\beta+(1-\alpha))=1.$$

由(Δ)即知

$$(\alpha\to)^{n+1}\beta=1=\min(1,\ (n+1)(1-\alpha)+\beta).$$

当$n(1-\alpha)+\beta<1$时，则有

$$\begin{aligned}\min(1,\ 1-\alpha+\min(1,\ n(1-\alpha)+\beta))&=\min(1,\ 1-\alpha+n(1-\alpha)+\beta)\\&=\min(1,\ (n+1)(1-\alpha)+\beta),\end{aligned}$$

同样由(Δ)可知

$$(\alpha\to)^{n+1}\beta=\min(1,\ (n+1)(1-\alpha)+\beta).$$ 证毕。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定理2　在有穷值逻辑系统$Ł_n(3\leqslant n<\omega)$中，规则(A_{n-1})成立。[2]

证明　若设(A_{n-1})不成立，则有命题α和β，使得$(\alpha\to)^n\beta$真，但$(\alpha\to)^{n-1}\beta$不为真，亦即$(\alpha\to)^n\beta=1$而$(\alpha\to)^{n-1}\beta<1$。由前所证之(*)知有

$$(\alpha\to)^n\beta=\min(1,\ n(1-\alpha)+\beta),$$

$$(\alpha\to)^{n-1}\beta=\min(1,\ (n-1)(1-\alpha)+\beta).$$

故有

$$(1)\quad n(1-\alpha)+\beta\geqslant 1,$$

$$(2)\quad (n-1)(1-\alpha)+\beta<1.$$

由于$1-\alpha\geqslant 0$，再由(2)知$1-\beta>(n-1)(1-\alpha)\geqslant 0$，故$1-\beta>0$，即$\beta<1$。同理$1-(n-1)\cdot(1-\alpha)>\beta\geqslant 0$，故$(n-1)(1-\alpha)<1$，即$(1-\alpha)<\frac{1}{n-1}$，故$\alpha>1-\frac{1}{n-1}=\frac{n-2}{n-1}$，但$Ł_n$中比$\frac{n-2}{n-1}$大的真值只有1，故$\alpha=1$。代入(1)得$n(1-1)+\beta\geqslant 1$，即$\beta\geqslant 1$。矛盾，证毕。

由定理1和定理2可知，如果保持概括原则，那么Łukasiewicz 有穷值逻辑系统$Ł_n(3\leqslant n<\omega)$中必定包含悖论。因为

$$(p\to)^1p=\min(1,\ 1-p+p)=1,$$

故$Ł_n(3\leqslant n<\omega)$中有$p\to p$。又由概括原则知$Ł_n$中有α_n，再由定理 2 知$Ł_n$中有规则(A_n)，从而由定理 1 知$Ł_n$中必定包含悖论。

定理3　在无穷值逻辑系统$Ł_{\aleph_0}$中，对任何n，规则(A_n)不成立。[2]

证明　因对任意给定的n，可选取两个命题x和y，使它们的逻辑真值分别为

$$x=\frac{n}{n+1}\qquad 和\qquad y=0,$$

故有

$$(1)\quad n(1-x)+y=\frac{n}{n+1}<1,$$

$$(2)\quad (n+1)(1-x)+y=1\geqslant 1.$$

于是

$$(x\to)^n y=\min(1,\ n(1-x)+y)=\min(1,\ \frac{n}{n+1})=\frac{n}{n+1}<1,$$

$$(x\to)^{n+1}y=\min(1,\ (n+1)(1-x)+y=1.$$

这表示$(x\to)^{n+1}y$真，但$(x\to)^n y$不为真，故(A_n)在$Ł_{\aleph_0}$中不成立。证毕。

本定理表明若用前述$Ł_n(3\leqslant n<\omega)$中构造悖论的方法来论断$Ł_{\aleph_0}$中是否存在悖论一事是无济于事的。

参　考　文　献

[1] Shen Yu—Ting,Paradox of the Class of All Grounded Classes, *J.S.L*, Vol.18(1953), 114.

[2] Moh Shaw—Kwei, Logical Paradoxes for Many—Valued Systems, *J.S.L.*,Vol.19(1954), 37.

[3] 朱梧槚，集合论与数学基础问题，辽宁省数学会印，1981.

[4] 朱梧槚，数学基础与数理逻辑基础，厦门大学印，1983.

[5] Jech.T., Set Theory, Academic Press, 1978.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.