第5卷 第3期
1985年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.3
July, 1985

重复变函数(下)*

濮德潜

(兰州大学)

§4 双曲数环

一、双曲数

在重复数 $z=x_0+ix_1+jx_2+kx_3$ 中令 $x_1=x_2=0$, $x_0=t$, $x_3=x$ 得 $\xi=t+kx$, 称 ξ 为双曲数。所有双曲数组成 $\mathscr{C}^2$ 的子环, 称为双曲数环, 记作 $\mathscr{H}$. $\mathscr{H}$ 中所有零因子和零的集合也称零集, 记作 $\mathscr{O}_{\mathscr{H}}$.

根据前面的讨论, 有

$$\xi=t+kx=e_1(t-x)+e_2(t+x)=e_1\zeta_1+e_2\zeta_2.$$

令 $\xi^I=t-kx$, 则

$$|\xi|=\sqrt{|\xi\xi^I|}=\sqrt{|t^2-x^2|},$$

$$\|\xi\|=(|t-x|,\ |t+x|).$$

$\xi\in\mathscr{O}_{\mathscr{H}}$ 的充要条件为

$$t=x,\ 或\ t=-x.$$

$\xi\bar{\in}\mathscr{O}_{\mathscr{H}}$ 的充要条件为 $|\xi|\neq0$, 这时 ξ 有逆

$$\xi^{-1}=\frac{\xi^I}{\xi\xi^I}.$$

二、双曲平面

在平面上取定直角坐标系, 将平面的点记作

$$(t,\ x)=t+kx=\xi,$$

称此平面为双曲平面. 设多值函数 $\omega=\mathrm{Arg}\xi$ 表向量 $\overrightarrow{o\xi}$ 与 t 轴正方向之交角.

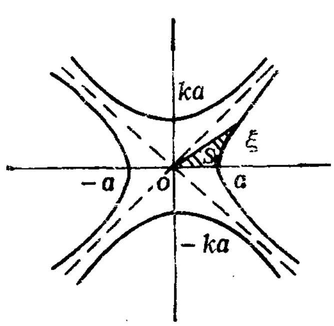
设 $\zeta_1=|\zeta_1|e^{i\theta_1}$, $\zeta_2=|\zeta_2|e^{i\theta_2}$, $\theta=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$, $\varphi=\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$, $\lambda=e^{i\theta+j\varphi}$. 则当

$-\dfrac{\pi}{4}<\omega<\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$ 从而 $\lambda=1$,

$\dfrac{\pi}{4}<\omega<\dfrac{3\pi}{4}$ 时, $\theta_1=\pi$, $\theta_2=0$ 从而 $\lambda=k$,

$\dfrac{3\pi}{4}<\omega<\dfrac{5\pi}{4}$ 时, $\theta_1=\pi$, $\theta_2=\pi$ 从而 $\lambda=-1$,

$\dfrac{5\pi}{4}<\omega<\dfrac{7\pi}{4}$ 时, $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$ 从而 $\lambda=-k$.



故当 $|\xi|\neq0$, 即 $\omega\neq(2p+1)\dfrac{\pi}{4}$, $p=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,

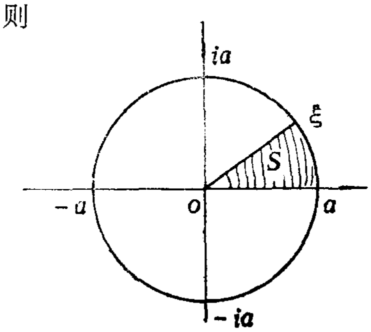
$$\xi=\lambda|\xi|e^{k\psi}=\lambda|\xi|(\mathrm{ch}\psi+k\mathrm{sh}\psi)$$

*1981年5月22日收到. 本文(上)见本刊第三卷(1983)第二期, 第113到122页.

这里
$$\psi=\frac{1}{2}\ln\frac{|t+x|}{|t-x|}=\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

方程$|\xi|=a$表双曲线$t^2-x^2=a^2$和$x^2-t^2=a^2$。

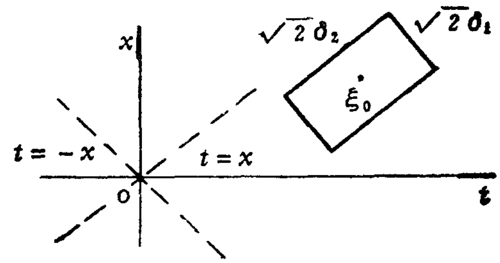
设向量$\overrightarrow{o\xi}$与坐标轴及$|\xi|=a$所围成的有界双曲边扇形区域的面积为S，且规定ξ在一、三象限时S为正，ξ在二、四象限时S为负，则



$$\psi=\frac{2S}{a^2}.$$

有趣的是当ξ表复数时，$|\xi|=a$表圆周，S表向量$\overrightarrow{o\xi}$与水平轴正方向及$|\xi|=a$所围成的面积，则上式
$$\frac{2S}{a^2}=\arg\xi=\theta,$$
而$\xi=|\xi|e^{i\theta}$。看来双曲平面和复平面有相互对应之处。

设$\xi_0=t_0+kx_0$我们说ξ_0的(δ_1,δ_2)邻域$(\delta_1,\delta_2>0)$，即$\|\xi-\xi_0\|<(\delta_1,\delta_2)$，亦即$|(t-t_0)-(x-x_0)|<\delta_1$，$|(t-t_0)+(x-x_0)|<\delta_2$。它表双曲$\xi$平面上以$\xi_0$为中心，平行于$t=x$直线的边长为$\sqrt{2}\delta_2$，平行于$t=-x$直线的边长为$\sqrt{2}\delta_1$的长方形内部。



定理4.1 双曲数幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\xi-\xi_0)^n$中$c_n$，$\xi$，$\xi_0$均为双曲数：$c_n=a_n+kb_n$，$\xi=t+kx$，$\xi_0=t_0+kx_0$。如果
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n-b_n|}=\frac{1}{R_1}<+\infty,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n+b_n|}=\frac{1}{R_2}<+\infty,$$
则此幂级数在$\|\xi-\xi_0\|<(R_1,R_2)$绝对而且内闭一致收敛。其和$f(\xi)=\alpha(\xi)+k\beta(\xi)$可表为
$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\xi-\xi_0)^n=f(\xi)=\frac{f_1(t-x)+f_2(t+x)}{2}-k\frac{f_1(t-x)-f_2(t+x)}{2}$$
其中
$$f_1(t-x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)[(t-x)-(t_0-x_0)]^n=\alpha(\xi)-\beta(\xi),$$
$$f_2(t+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)[(t+x)-(t_0+x_0)]^n=\alpha(\xi)+\beta(\xi).$$

§5 双曲映射

一、双曲映射

设$F(\xi)=u(\xi)+kv(\xi)$为$\mathscr{H}$内到$\mathscr{H}$内的映射，其中$u(\xi)$和$v(\xi)$为实值函数，$\xi=t+kx$。

定义5.1 设$F(\xi)=u+kv$在双曲ξ平面的区域D定义，u，v在D可微，如果在D

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi)=0$$

称 F 在 D 为双曲映射。称 u、v 为共轭双曲映射函数。称 $\frac{\partial}{\partial \xi} F=0$ 为 Cauchy-Riemann 双曲方程，即

$$\begin{cases} u_t=v_x \\ u_x=v_t . \end{cases}$$

定理5.1　$F(\xi)$ 在 D 为双曲映射的充要条件为：对任意 $\xi \in D$ 下面极限存在：

$$\lim_{0<|\Delta\xi|\to 0} \frac{F(\xi+\Delta\xi)-F(\xi)}{\Delta\xi}=F'(\xi)=\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi}.$$

显然，F，F^* 双曲，则 $F \pm F^*$，FF^*，$F/F^*(\|F^*\|>0)$ $F(F^*)$，（F^* 的值域在 F 的定义域中）均双曲。

当 $F=u+kv$ 双曲，若 u，v 还存在二阶连续偏导数，则 u，v 也就是 F 满足双曲方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)F=0. \tag{5.1}$$

定理5.2　设 $F(\xi)$ 在单连区域 D 双曲，C 为 D 内一条可度长简单闭曲线，则

$$\int_C f(\xi)\,d\xi=0.$$

在单连区域 D 给定实值函数 $u(\xi)$，满足双曲方程 $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=0$，则相差一个任意常数可唯一确定其共轭双曲映射函数 $v(\xi)+C$。

这段结论的证明均与复变函数相应内容相仿。

二、D'Alembert 解

定理5.3　设重复变函数 $F(Z)=U_0+iU_1+jU_2+kU_3$ 在区域 Ω 定义，$Z=x_0+ix_1+jx_2+kx_3$，$U_k(k=0,1,2,3)$ 在 Ω 可微，并设 $F(Z)$ 与 x_1, x_2 无关，$F(Z)$ 在 Ω 半解析的充要条件为 $F(Z)^{\mathrm{I}}=F(\xi)^{\mathrm{I}}=U_0+iU_1-jU_2-kU_3=[U_0+k(-U_3)]+i[U_1+kU_2]$ 对 $\xi=x_0+kx_3$ 可导：

$$\lim_{0<|\Delta\xi|\to 0} \frac{F(\xi+\Delta\xi)^{\mathrm{I}}-F(\xi)^{\mathrm{I}}}{\Delta\xi}=F'(\xi)^{\mathrm{I}}=\frac{\partial F^{\mathrm{I}}}{\partial \xi}.$$

这条件等价于 U_0-kU_3 和 U_1+kU_2 均为双曲映射。

证明　由（2.3）式知

$$\begin{cases} U_{0;0}+U_{3;3}=0 \\ U_{3;0}+U_{0;3}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} U_{1;0}-U_{2;3}=0 \\ U_{2;0}-U_{1;3}=0, \end{cases}$$

再由定义 5.1 和定理 5.1，便得所欲证。

定理5.4　设 $Z=x_0+ix_1+jx_2+kx_3$，半解析函数 $F(Z)=U_0+iU_1+jU_2+kU_3$ 若与 x_1，x_2 无关，则

$$U_0=\varphi(x_0-x_3)+\psi(x_0+x_3) \qquad U_1=\rho(x_0+x_3)+\pi(x_0-x_3)$$
$$U_2=\rho(x_0+x_3)-\pi(x_0-x_3) \qquad U_3=\varphi(x_0-x_3)-\psi(x_0+x_3)$$

其中 φ，ψ，ρ，π 为任意可导实函数。

证 由于$F(Z)$半解析，即$\frac{\partial F}{\partial Z^{\text{m}}}=0$，这等价于$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{\zeta}_1}=0$，$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\zeta}_2}=0$。而$\Phi_1$，$\Phi_2$又与$x_1$，$x_2$无关，从而$\Phi_1$与$\zeta_1$无关，$\Phi_2$与$\zeta_2$无关。故可令

$$\Phi_1=2[\psi(x_0+x_3)+i\rho(x_0+x_3)]$$

$$\Phi_2=2[\varphi(x_0-x_3)+i\pi(x_0-x_3)],$$

因为这时$\zeta_1=x_0-x_3$，$\zeta_2=x_0+x_3$。再由关系

$$\Phi_1=(U_0-U_3)+i(U_1+U_2)$$

$$\Phi_2=(U_0+U_3)+i(U_1-U_2)$$

便得定理中的结论。

§6 双曲调和函数

一、双曲调和函数

定理6.1 $F(Z)=\Gamma_1(\xi_1,\ \xi_2)+i\Gamma_2(\xi_1,\ \xi_2)$在$\Omega$重解析的充要条件为$\Gamma_1$，$\Gamma_2$均是关于$\xi_1$和$\xi_2$二元双曲映射，且

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_1}=\frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi_2},\quad \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_2}=-\frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi_1}.$$

这个定理和定理2.5一样，容易从（2.2）式推出。

当$F=\Gamma_1+i\Gamma_2$重解析时，Γ_1，Γ_2从而F满足双曲数的调和方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right)F=0.$$

我们称Γ_1，Γ_2为*双曲调和函数*，而称Γ_2为Γ_1的*共轭双曲调和函数*。

在单连区域给定双曲调和函数，相差一个任意常数可唯一确定共轭双曲调和函数。

二、双曲方程解析解的扩张

定理6.2 设在（t_0，x_0）邻域内二元解析实函数

$$u(t,\ x)=\sum_{q,p=0}^{\infty}a_{p,q}(t-t_0)^p(x-x_0)^q$$

为双曲方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=0$$

的解，则其共轭双曲映射函数

$$v(t,\ x)=C+\sum_{q=1}^{\infty}a_{1,q-1}\frac{1}{q}(x-x_0)^q+\sum_{\substack{p=1\\q=0}}^{\infty}a_{p-1,q+1}\frac{q+1}{p}(t-t_0)^p(x-x_0)^q.$$

证
$$v(t,\ x)=C+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u(t_0,\ x)}{\partial t}dx+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial x}dt$$

$$=C+\int_{x_0}^{x}\sum_{q=0}^{\infty}a_{1,q}(x-x_0)^q dx+\int_{t_0}^{t}\sum_{\substack{p=0\\q=1}}^{\infty}a_{p,q}q(t-t_0)^p(x-x_0)^{q-1}dt$$

$$=C+\sum_{q=1}^{\infty}a_{1,q-1}\frac{1}{q}(x-x_0)^q+\sum_{\substack{p=1\\q=0}}^{\infty}a_{p-1,q+1}\frac{q+1}{p}(t-t_0)^p(x-x_0)^q.$$

定义6.1 设在单连通区域D，$u(t,\ x)$为双曲方程（5.1）的实值函数解，设u的共轭双曲映射函数为$v(t,\ x)$，我们称$f(\xi)=u+kv$为u在D的*双曲映射扩张*。

定理6.3　双曲方程（5.1）在单连通区域D的解析解$u(t, x)$的双曲映射扩张$f(\xi)$在D中任意点的邻域可展成双曲数的幂级数.

证　在D中任意点$\xi_0=t_0+kx_0$的邻域内设

$$u(t,\ x)=\sum_{p,q=0}^{\infty}a_{p,q}(t-t_0)^p(x-x_0)^q.$$

由于u满足双曲方程(5.1)，知

$$(q+2)(q+1)a_{p,q+2}=(p+2)(p+1)a_{p+2,q},\quad p,\ q=0,1,2,\cdots$$

于是

$$a_{p,q}=\binom{p+q}{q}a_{p+q,0}\ \text{当}\ q\ \text{为偶},\quad a_{p,q}=\frac{1}{p+q}\binom{p+q}{q}a_{p+q-1,1}\ \text{当}\ q\ \text{为奇}.$$

由定理 6.2 得

$$\begin{aligned}
f(\xi)&=c+a_{00}+\sum_{q=1}^{\infty}\left(a_{0,q}+ka_{1,q-1}\frac{1}{q}\right)(x+x_0)^q+\sum_{\substack{p=1\\q=0}}^{\infty}\left(a_{p,q}+ka_{p-1,q+1}\frac{q+1}{p}\right)(t-t_0)^p(x-x_0)^q\\
&=c_0+\sum_{\substack{q=2\\q\text{为偶}}}^{\infty}\left[a_{q,0}+ka_{q-1,1}\binom{q}{q-1}\frac{1}{q^2}\right](x-x_0)^q+\sum_{\substack{p=1\\q=0\\q\text{为偶}}}^{\infty}\left[a_{p+q,0}\binom{p+q}{q}\right.\\
&\qquad\left.+ka_{p+q-1,1}\binom{p+q}{q+1}\frac{q+1}{p(p+q)}\right](t-t_0)^p(x-x_0)^q\\
&\qquad+\sum_{\substack{q=1\\q\text{为奇}}}^{\infty}\left[a_{q-1,1}\frac{1}{q}+ka_{q,0}\binom{q}{q-1}\frac{1}{q}\right](x-x_0)^q+\sum_{\substack{p=1\\q=1\\q\text{为奇}}}^{\infty}\left[a_{p+q-1,1}\binom{p+q}{q}\frac{1}{p+q}\right.\\
&\qquad\left.+k\,a_{p+q,0}\binom{p+q}{q+1}\frac{q+1}{p}\right](t-t_0)^p(x-x_0)^q\\
&=c_0+\sum_{q=1}^{\infty}\left[a_{q,0}+k\frac{1}{q}a_{q-1,1}\right]\left[k(x-x_0)\right]^q+\sum_{\substack{p=1\\q=0}}^{\infty}\left[a_{p+q,0}\right.\\
&\qquad\left.+k\frac{1}{p+q}\,a_{p+q-1,1}\right]\binom{p+q}{q}(t-t_0)^p[k(x-x_0)]^q\\
&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p+q=n}\left(a_{n,0}+k\frac{1}{n}\,a_{n-1,1}\right)\binom{n}{q}(t-t_0)^{n-q}[k(x-x_0)]^q\\
&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n,0}+k\frac{1}{n}a_{n-1,1}\right)(\xi-\xi_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\xi-\xi_0)^n.
\end{aligned}$$

证毕.

定理6.4　设双曲数的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(\xi-\xi_0)^n$在$\|\xi-\xi_0\|<(R_1,\ R_2)$收敛到$f(\xi)$，则$f(\xi)$为双曲映射，且对$\xi$可导任意次：

$$f^{(n)}(\xi)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+r)!}{r!}c_{n+r}(\xi-\xi_0)^r,$$

从而

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi_0).$$

证　从定理 4.1 知$f(\xi)=e_1f_1(\zeta_1)+e_2f_2(\zeta_2)$，设$c_n=a_n+kb_n$，有$f_1(\zeta_1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)(\zeta_1-\zeta_1^0)^n$，$f_2(\zeta_2)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(\zeta_2-\zeta_2^0)^n$，其中$\zeta_1^0=t_0-x_0$，$\zeta_2^0=t_0+x_0$。因为$f_1$，$f_2$可导任意次：

$$f_1^{(n)}(\zeta_1)=\sum_{r=0}^{\infty}(a_{n+r}-b_{n+r})\frac{(n+r)!}{r!}(\zeta_1-\zeta_1^0)^r,$$

$$f_2^{(n)}(\zeta_2)=\sum_{r=0}^{\infty}(a_{n+r}+b_{n+r})\frac{(n+r)!}{r!}(\zeta_2-\zeta_2^0)^r.$$

故 f 可导任意次：

$$f^{(n)}(\xi)=e_1f_1^{(n)}(\zeta_1)+e_2f_2^{(n)}(\zeta_2).$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+r)!}{r!}c_{n+r}(\xi-\xi_0)^n,$$

这包含了$f(\xi)$为双曲映射．证毕．

定理6.5 设 $u(t,x)$ 为双曲方程（5.1）在单连通区域D的解析解，$\xi_0\in D$，则 u 在 D 的双曲映射扩张

$$f(\xi)=2u\left(\frac{\xi+\xi_0^I}{2},\ \frac{\xi-\xi_0^I}{2k}\right)-f(\xi_0)^I.$$

这定理的证明和复变函数相应定理相仿．

由单元复变函数的解析函数唯一性理论，易证：

定理6.6 设双曲方程（5.1）在单连通区域D的解析解$u(t,x)$ 在D的双曲映射扩张为$f(\xi)$．设在D中的ξ_0邻域$\|\xi-\xi_0\|<(\varepsilon_1^{(0)},\ \varepsilon_2^{(0)})$ 内

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\xi-\xi_0)^n.$$

令 $Z=\xi_1+i\xi_2$，并令

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(Z-\xi_0)^n,$$

则 $F(Z)$ 在区域G单值，且为一重解析函数．这里 $G=\bigcup_{\xi_0\in D}\Delta_{\xi_0}\supset D$，而$\Delta_{\xi_0}$表双圆柱域$\|Z-\xi_0\|<(\varepsilon_1^{(0)},\ \varepsilon_2^{(0)})$．当双曲数 $\xi\in D$时，有 $F(\xi)=f(\xi)$．

定义6.2 设 $u(t,x)$ 为双曲方程（5.1）在单连通区域D的解析解．我们称定理6.6中的 $F(Z)$为 u 在G的重解析函数扩张．

由于u在D的双曲映射扩张相差一个任意常数是唯一的，从而u在G的重解析函数扩张相差一个任意常数也是唯一的．

§7 Schwarz 公式和 Poisson 公式

定理7.1 设 $F(Z)=e_1\Phi_1+e_2\Phi_2$ 在曲线 C：

$$Z(\alpha)=\rho e^{i\alpha}=e_1\rho e^{i\alpha}+e_2\rho e^{i\alpha},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant2\pi,$$

内重解析，$\mathrm{Re}\Phi_1$ 和 $\mathrm{Re}\Phi_2$ 连续直到边界，则

$$F(Z)=i\xi_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1(\rho e^{i\alpha})\frac{\rho e^{i\alpha}+Z}{\rho e^{i\alpha}-Z}d\alpha,$$

即

$$\Gamma_1(Z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1(\rho e^{i\alpha})\frac{\rho^2-\xi_1^2-\xi_2^2}{\rho^2+\xi_1^2+\xi_2^2-2\rho(\xi_1\cos\alpha+\xi_2\sin\alpha)}d\alpha,$$

$$\Gamma_2(Z)=\xi_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1(\rho e^{i\alpha})\frac{2\rho(\xi_2\cos\alpha-\xi_1\sin\alpha)}{\rho^2+\xi_1^2+\xi_2^2-2\rho(\xi_1\cos\alpha+\xi_2\sin\alpha)}d\alpha,$$

这里 $Z=\xi_1+i\xi_2$，ξ_0，ξ_1，ξ_2 为双曲数，$\|Z\|<\rho$．

证　设 $F(Z)=U_0(Z)+iU_1(Z)+jU_2(Z)+kU_3(Z)$，于是

$$\Phi_1(\zeta_1)=[U_0(Z)-U_3(Z)]+i[U_1(Z)+U_2(Z)],$$
$$\Phi_2(\zeta_2)=[U_0(Z)+U_3(Z)]+i[U_1(Z)-U_2(Z)].$$

由单元复变函数的Schwarz 公式

$$\Phi_1(\zeta_1)=i\alpha_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(U_0-U_3)\frac{\rho e^{i\alpha}+\zeta_1}{\rho e^{i\alpha}-\zeta_1}d\alpha,\quad \Phi_2(\zeta_2)=i\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(U_0+U_3)\frac{\rho e^{i\alpha}+\zeta_2}{\rho e^{i\alpha}-\zeta_2}d\alpha,$$

得

$$\begin{aligned}F(Z)&=e_1\Phi_1+e_2\Phi_2\\&=i\xi_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1(\rho e^{i\alpha})\frac{\rho e^{i\alpha}+Z}{\rho e^{i\alpha}-Z}dx,\end{aligned}$$

这里 $\xi_0=\dfrac{\beta_0+\alpha_0}{2}+k\dfrac{\beta_0-\alpha_0}{2}$，$\Gamma_1=U_0+kU_3$.

设 $Z=\xi_1+i\xi_2$，由

$$\frac{\rho e^{i\alpha}+Z}{\rho e^{i\alpha}-Z}=\frac{(\rho^2-\xi_1^2-\xi_2^2)+i2\rho(\xi_2\cos\alpha-\xi_1\sin\alpha)}{\rho^2+\xi_1^2+\xi_2^2-2\rho(\xi_1\cos\alpha+\xi_2\sin\alpha)}$$

便得到 Γ_1 和 Γ_2 的表达式.

定理7.2　设 $F(Z)=e_1\Phi_1+e_2\Phi_2$ 在曲线 C：

$$Z(\alpha)=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha+j\cos\alpha+k\sin\alpha)=\sqrt{2}\rho[e_1e^{i(\alpha+\frac{\pi}{4})}+e_2e^{i(\alpha-\frac{\pi}{4})}],0\leqslant\alpha\leqslant2\pi,$$

内重解析，$\mathrm{Re}\Phi_1$ 和 $\mathrm{Re}\Phi_2$ 连续直到边界，则

$$F(Z)=i\xi_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{\rho e^{i\alpha}(1+j)+Z}{\rho e^{i\alpha}(1+j)-Z}d\alpha,\quad \|Z\|<\sqrt{2}\rho.$$

即

$$\Gamma_1(Z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{2\rho^2-\xi_1^2-\xi_2^2}{2\rho^2+\xi_1^2+\xi_2^2-2\rho[\xi_1(\cos\alpha+k\sin\alpha)+\xi_2(\sin\alpha-k\cos\alpha)]}d\alpha,$$

$$\Gamma_2(Z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{2\rho[\xi_2(\cos\alpha+k\sin\alpha)-\xi_1(\sin\alpha-k\cos\alpha)]}{2\rho^2+\xi_1^2+\xi_2^2-2\rho[\xi_1(\cos\alpha+k\sin\alpha)+\xi_2(\sin\alpha-k\cos\alpha)]}d\alpha+\xi_0.$$

定理 7.2 的证明仿定理7.1.

定理7.3　设$F(Z)=e_1\Phi_1+e_2\Phi_2$在曲线C：

$$Z(\alpha)=\rho(\cos\alpha+k\sin\alpha)=\sqrt{2}\rho\left[e_1\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+e_2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right],\quad 0\leqslant\alpha\leqslant2\pi,$$

外重解析，且$\|F(Z)\|<M<+\infty$，$\mathrm{Re}\Phi_1$ 和$\mathrm{Re}\Phi_2$连续直到边界上、下沿，则

$$F(Z)=i\xi_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{\rho e^{i\alpha}(1+j)+(Z+\sqrt{Z^2-2\rho^2})}{\rho e^{i\alpha}(1+j)-(Z+\sqrt{Z^2-2\rho^2})}d\alpha,$$

这里 Z 在 C 外，取定 $\sqrt{Z^2-2\rho^2}$ 的一个分枝使$\|Z+\sqrt{Z^2-2\rho^2}\|<\sqrt{2}\rho$.

当 $Z=\xi=t+kx$ 为双曲数时，

$$\Gamma_1(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{\sqrt{\xi^2-2\rho^2}}{\rho(\cos\alpha+k\sin\alpha)-\xi}d\alpha,$$

这里$\|\xi\|>\sqrt{2}\rho$，取$\sqrt{\xi^2-2\rho^2}=-\dfrac{t-x}{|t-x|}\sqrt{(t-x)^2-2\rho^2}e_1-\dfrac{t+x}{|t+x|}\sqrt{(t+x)^2-2\rho^2}e_2$.

证　设 $Z=e_1\zeta_1+e_2\zeta_2$，作变换

$$\zeta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\left(\zeta_1^*+\frac{1}{\zeta_1^*}\right),\quad \zeta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\left(\zeta_2^*+\frac{1}{\zeta_2^*}\right).$$

记 $Z^*=e_1\zeta_1^*+e_2\zeta_2^*$，则

$$Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\left(Z^*+\frac{1}{Z^*}\right),$$

它将曲线 C^*：

$$Z^*(\alpha)=e_1e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}+e_2e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha+j\cos\alpha+k\sin\alpha)$$

映射成 C；将 $0<\|Z^*\|<1$ 映射成 C 外。

令
$$F^*(Z^*)=F\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\left(Z^*+\frac{1}{Z^*}\right)\right],$$

并记 $F(Z)=\Gamma_1(Z)+i\Gamma_2(Z)$，$F^*(Z^*)=\Gamma_1^*(Z^*)+i\Gamma_2^*(Z^*)=e_1\Phi_1^*+e_2\Phi_2^*$.

可知 $F^*(Z^*)$ 在 $0<\|Z^*\|<1$ 重解析。又因 $F(Z)$ 有界且 $\mathrm{Re}\Phi_1$ 和 $\mathrm{Re}\Phi_2$ 连续到边界，从而 $F^*(Z^*)$ 在 $\|Z^*\|<1$ 重解析，且 $\mathrm{Re}\Phi_1^*$ 和 $\mathrm{Re}\Phi_2^*$ 连续直到边界。由定理7.2：

$$F^*(Z^*)=i\xi_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1^*[Z^*(\alpha)]\frac{e^{i\alpha}(1+j)+\sqrt{2}Z^*}{e^{i\alpha}(1+j)-\sqrt{2}Z^*}d\alpha,\quad \|Z^*\|<1.$$

由 Z 和 Z^* 的关系知

$$Z^*=\frac{\sqrt{2}}{2\rho}(Z+\sqrt{Z^2-2\rho^2}).$$

Z 在 C 外，取定 $\sqrt{Z^2-2\rho^2}$ 四个分枝的一个，使 $\|Z+\sqrt{Z^2-2\rho^2}\|<\sqrt{2}\rho$，得

$$F(Z)=i\xi_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{\rho e^{i\alpha}(1+j)+(Z+\sqrt{Z^2-2\rho^2})}{\rho e^{i\alpha}(1+j)-(Z+\sqrt{Z^2-2\rho^2})}d\alpha.$$

当 $Z=\xi=t+kx$ 为双曲数时，

$$F(\xi)=i\xi_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{\rho e^{i\alpha}(1+j)+(\xi+\sqrt{\xi^2-2\rho^2})}{\rho e^{i\alpha}(1+j)-(\xi+\sqrt{\xi^2-2\rho^2})}d\alpha.$$

又由定理7.2：

$$\Gamma_1(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{2\rho^2-(\xi+\sqrt{\xi^2-2\rho^2})^2}{2\rho^2+(\xi+\sqrt{\xi^2-2\rho^2})^2-2\rho(\xi+\sqrt{\xi^2-2\rho^2})(\cos\alpha+k\sin\alpha)}d\alpha$$

即

$$\Gamma_1(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_1[Z(\alpha)]\frac{\sqrt{\xi^2-2\rho^2}}{\rho(\cos\alpha+k\sin\alpha)-\xi}d\alpha.$$

这里 $\|\xi\|>\sqrt{2}\rho$ 为了使 $\|\xi+\sqrt{\xi^2-2\rho^2}\|<\sqrt{2}\rho$，必须只须取

$$\sqrt{\xi^2-2\rho^2}=-e_1\frac{t-x}{|t-x|}\sqrt{(t-x)^2-2\rho^2}-e_2\frac{t+x}{|t+x|}\sqrt{(t+x)^2-2\rho^2}.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Van der Waerden, B. L., Algebra.

[2] Gray, J. D. and Morris, S. A., When is a function that satisfies the Cauchy-Riemenn equations? *Amer. Math. Mon.* 85(1978) 246-256.