第5卷 第3期 数学研究与评论 Vol.5 No.3
1985年7月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION July, 1985

关于可达范数的算子之稠密性问题*

定光桂

（南开大学）

在Banach空间理论中，有关可达范数算子在相应的“算子空间”之稠密性问题曾经是一个二十多年来为许多人注目的问题，至今仍有一些问题还未解决，因此特介绍如下：

一 历史与问题

我们熟知：在“自反”的Banach空间E的闭单位球上，线性连续泛函是可以取到它的范数值的，即：$\forall f_0\in E^*, \exists x_0\in \bar{B}_1(\theta)$，使得$f_0(x_0)=\|f_0\|$（这里$\bar{B}_1(\theta)=\{x\mid \|x\|\le 1, x\in E\}$为$E$的(闭)单位球)。并且，后来James还曾指出[1]，上述性质也正是一个Banach空间成为自反空间的特征。

1957年，Phelps按上列启示对一般的(Banach)赋范空间E给出了“次自反”的定义，即：在E的(闭)单位球$\bar{B}_1(\theta)$上达到范数的线性连续泛函元全体是稠于E^*(E的共轭空间)的。由此，不少人就在赋范空间中分辨其是否“次自反”的问题上而展开了工作。

然而，到了1961年，Phelps和Bishop却发现[2]：*每一个Banach空间都是次自反的*。从而使此一问题的讨论基本结束（注意：对于不完备的赋范空间而言，其未必均是“次自反”的，反例可见$C[a,b]$中由“多项式”全体所成的线性子空间[3]）。

但是，在文[2]中，上述作者们笔锋一转，却将原来问题开拓为下述更一般（从而也更困难）的问题，此即所谓“可达范数算子的稠密性问题”：

问题 设E、E_1均为Banach空间，$\mathscr{B}(E\to E_1)$为E到E_1内所有连续线性算子之全体所成的Banach空间。试问：空间$\mathscr{B}(E\to E_1)$内“可达范数”的算子之全体在空间是稠密的吗？

后来，人们也简单地将上述问题说成是：空间$\mathscr{B}(E\to E_1)$是否具有Bishop-Phepls性质？这一问题显然是不容易用一个“一般方法”予以解决的，因为$\mathscr{B}(E\to E_1)$内“元”(算子)的特性必然紧密地依赖于空间E和E_1，因此当空间不同时，相应的算子也必然发生很大的变化。后来的事实验证了人们原来的估计，直到1983年，人们通过22年的工作才算将我们熟悉的一些(古典)Banach空间之间的情况（对B.—P.性质而言）弄清楚。

二 对上述问题研究的一些重要结果

下面，我们列举22年来对上述问题所得到的一些重要结果：

1）1963年，Lindenstrauss依赖于Banach空间的某些“凸性”与“光滑性”的结果，得到了下面的结论[4]：*当E是“自反”时，空间$\mathscr{B}(E\to E_1)$均具有B.—P.性质。*

*1985年1月16日收到。

2) 1976 年，Uhl 利用抽象函数引出的有关抽象空间的所谓“Radon—Nikodým”性质（即：我们称空间 Y 具有“$R.—N.$性质”，是指对任意有限测度空间 (S,Σ,μ) 及任意在 Y 内取值、μ—连续的囿变（抽象）函数 m，必存在一个 Bochner 可积（从 S 到Y）的（抽象）函数 f，使得 $m(E)=\int_E f d\mu$，$\forall E\in\Sigma$）得到有关（非自反空间）L^1 的下述结果[5]：空间$\mathscr{B}(L^1\rightarrow Y)$具有B.—P.性质的充要条件是 Y 具有 $R.—N.$ 性质。

3) 1977 年，Johnson 和 Wolfe 利用算子与测度的对应，构造性地证明有关（非自反空间）C 的下述结果[6]：当 S、T 均为紧 Hausdorff 空间时，空间$\mathscr{B}(C(S)\rightarrow C(T))$必具有$B.—P.$性质。

4) 1977年，Bourgain 发现了空间$\mathscr{B}(E\rightarrow E_1)$满足 $R.—N.$性质与具有 $B.—P.$性质间的关系，因更一般的他得到了如下结果[7]：一个 Banach 空间其 R.—N.性质与 B.—P.性质是等价的。

5) 1979年，Iwanik 利用随机过程及测度论的知识（通过 L^∞ 上的“Markov算子”全体M与可测长方形 $\mathscr{F}^2$ 内的“双随机测度”集间的 1—1 对应关系）得到结果[8]：空间$\mathscr{B}(L^1\rightarrow L^1)$ 是具有B.—P. 性质的[这里，L^1 可以推广为任意可分的 Lebesgue 空间（即“AL空间”）]。

6) 1983年，Schachermayer 构造性地得到了第一个古典 Banach空间之间的有界线性算子空间不具有 B.—P. 性质的例子，他指出[9]：空间 $\mathscr{B}(L^1[0,1]\rightarrow C[0,1])$是不具有 B.—P.性质的。此外，他还指出：对于 C(K)到任一 Banach 空间X 内的“弱紧”线性算子必可由可达范数算子所逼近。由此作为特例，他将人们所关注的另外两个空间也得到了到了下面回答：间空$\mathscr{B}(C(K)\rightarrow L^1[0,1])$及$\mathscr{B}(C(K)\rightarrow l^2)$均具有 B.—P. 性质（这里K为紧 Hansdorff 空间）。

三 遗留的问题

在文[4]中，Lindenstrauss 给出了 Banach 空间 E 的两个类型的定义：我们称E满足“性质 A”，是指对任意的 Banach 空间E_1，空间$\mathscr{B}(E\rightarrow E_1)$ 均具有 B.—P. 性质；而称 E_1 满足“性质B”，则是指对任意 Banach 空间 E，空间$\mathscr{B}(E\rightarrow E_1)$ 均具有 B.—P. 性质。并且该文给出了某些抽象及具体的有关性质 A 及 A 的空间结果。例如：(a) 空间 $L_1(\mu)$具有“性质 A”的充要条件为测度 μ 是“纯原子的”(Purely atomic)；(b)空间 C(K)（K 为紧距离空间）具有“性质 A”的充要条件为 K 是有限集；等等。并且随之近年来引出了 Partington[10]与 Schachermayer[11]有关 Banach 空间重新赋以等价的范数使其构成具有“性质 A”和“性质 B”空间的一些结果。然而，回到我们熟知的 Banach 空间（进而完备的赋 β-范空间 $L^\beta[0,1]$, l^β, $(0<\beta<1)$），例如，我们知道 l^∞ 与 c_0具有“性质 B”，然而 l^1 和 l^2 是否具有同样性质却都不知道。因此我们可以提出下面问题：

问题1 对所有熟悉的古典 Banach 空间完成有关其是否满足“性质 A”及“性质 B”的讨论。

另外，在笔者文[12]中，曾经作为推论得到过有关 L^1 上“正算子”（即：$x\geqslant 0\Rightarrow Tx\geqslant 0$）可用可达范数的正算子逼近的结果。因此，一般地我们也可以提出下面另一问题：

问题2 对于Banach格 E,E_1而言，$\mathscr{B}(E\to E_1)$内的所有"正算子"的全体是否均具有B.—P. 性质（也即：$\mathscr{B}(E\to E_1)$内所有可达范数的正算子之全体是否在全部正算子的集合中是稠密的)？

参　考　文　献

[1] James, R. C., A characterization of the reflexive Banach space, *Studia Math.*, 23(1964), 205 -216.

[2] Bishop, E., Phelps, R. R., A proof that every Banach space is subreflexive, Bull. Amer. Makh. Soc., 67(1961), 97-98.

[3] Holmes, R.B., Geometric functional analysis and its applications, Springer-Verlag, 1975.

[4] Lindenstrauss, J., On operators which attain their norm, *Israel J.Math.* 1 (1963), 139-148.

[5] Uhl, Jr. J. J., Norm attaining operators on $L^1[0,1]$ and the Radon-Nikodým property, *Pacif. J. Math.*, 63.1(1976), 293-300.

[6] Johnson, J., Wolfe, J., Norm attaining operators, Lecture Notes in Mathem, 604 (1977),41-43.

[7] Bourgain, J., On dentability and the Bishop-Phelps property, *Israel J. Math.* 28 (1977). 265-271.

[8] Iwanik, A., Norm attaining operators on Lebesgue speces, *Pacif. J.Math.*, 83.2 (199), 381-386.

[9] Schachermayer, W., Norm attaining operators on some classical Banach spaces, *Pacif. J. Math.*, 105.2(1983), 427-438.

[10] Partington, J.R., Norm attaining operators, *Israel J. Math.*, 43.3(1982), 273-276.

[11] Schachermayer, W., Norm attaining operators and renormings of Banach spaces, *Israel J. Math.* 44.3 (1983), 201-212.

[12] 定光桂，$\mathscr{B}(L^1\to L^1)$中的等距与几乎等距算子(即将在"数学学报"英文版发表)。