第5卷 第3期
1985年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.3
July, 1985

关于Jean Piere Aubin所提的两个构造问题——对J-P Aubin所著的“Applied Functional Analysis”一书的一点评注

朱继生

（重庆大学）

Jean-Piere Aubin 在他所著的“Applied Functional Analysis”一书中为了推理的需要，常不加证明地宣布存在具某特定性质的函数，这些函数有些是的确存在的，有些则不尽然，现各举一例。

例1 （见[1]P. 199）求函数列$\{\theta_j(x)\}\subset\mathcal{D}(R)$（$R$ 上具有界支集的无穷次可微函数全体），满足：

$$D^k\theta_j(0)=\delta_j^k=\begin{cases}1 & \text{当}k=j\text{时},\\ 0 & \text{当}k\neq j\text{时}.\end{cases}$$

现取函数

$$\rho(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{h^2}{h^2-x^2}\right) & \text{当}|x|<h\text{时},\\ 0 & \text{当}|x|\geqslant h\text{时},\end{cases}$$

命 $\rho_0(x)=\dfrac{1}{\int\rho(x)dx}\rho(x)$，由 $\rho_0(x)$所决定的矩量为 $d_k=\int\rho(x)\dfrac{x^k}{k!}dx$，$k=0,1,2,\cdots$，其中 $d_0=1$，$d_{2j+1}=0$，$(j=1,2,\cdots)$．定义多项式

$$(1)\quad \varphi_j(x)=\frac{x^j}{j!}+a_j-2\frac{x^{j-2}}{(j-2)!}+\cdots$$

其系数$a_{j-2k}(k=1,2,\cdots)$由如下方程组决定：

当 j 为偶数时

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}d_j+a_{j-2}d_{j-2}+a_{j-4}d_{j-4}+\cdots+a_0=0\\ d_{j-2}+a_{j-2}d_{j-4}+a_{j-4}d_{j-6}+\cdots+a_2=0\\ \cdots\\ d_4+a_{j-2}d_2+a_{j-4}=0\\ d_2+a_{j-2}=0\end{cases}$$

当 j 为奇数时

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}d_{j-1}+a_{j-2}d_{j-3}+a_{j-4}d_{j-5}+\cdots+a_1=0\\ d_{j-3}+a_{j-2}d_{j-5}+a_{j-4}d_{j-7}+\cdots+a_3=0\\ \cdots\\ d_4+a_{j-2}d_2+a_{j-4}=0\\ d_2+a_{j-2}=0\end{cases}$$

由此方程组解出a_{j-2}，a_{j-4}，$\cdots$代入(1)即得多项式$\varphi_j(x)$，多项式组$\{\varphi_j(x)\}$满足

$$\int\rho_0(x)D^k\varphi_j(x)dx=\delta_j^k.$$

* 1983年8月1日收到.

取连续函数

$$\psi_j(x)=\begin{cases}\varphi_j(x) & \text{当}|x|\leqslant a,\ (a>h)\text{时,}\\ 0 & \text{当}|x|\geqslant a+\delta,\ (\delta>0)\text{时,}\end{cases}$$

令 $\theta_j(x)=\rho_0*\psi_j(x)$，显然此函数列$\{\theta_j(x)\}$即是所求的函数列。

利用函数列 $\{\theta_j(x)\}$ 就可造出 $\varphi(x)\in\mathscr{D}(R)$，使它在指定点处具有指定的前 $m+1$ 阶导数值 $\alpha_j(0\leqslant j\leqslant m)$，这只需取 $\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\theta_j(x)$ 即可，也可造出函数 $\psi(x)\in\mathscr{D}(R)$ 使它在某区间 $[a,b]$ 的一端，譬如 a 处具指定的前$m+1$阶导数值，而在另一端 b 的某邻域内为 0。因此，对 $[a,b]$ 的任何划分 $a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n=b$，可选出 $\varphi(x)\in\mathscr{D}(R)$，使其在各分点 $\xi_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 处具指定的前 $m+1$ 阶导数值，…。

例2. 设 $\chi(\omega)$为 $[0,1]$的特征函数，则存在常数组 $b_0=1,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 满足恒等式：

$$\sum_{k\in Z}\frac{k^j}{j!}\chi^{*(m+1)}(\omega-k)=\sum_{\rho=0}^{j}b_{j-\rho}\frac{\omega^\rho}{\rho!}\quad 0\leqslant j\leqslant m,$$

由常数组 $b_0=1,\ b_1,\cdots,b_m$ 按如下方程组决定常数组 $d_0=1,\ d_1,d_2,\cdots,d_m$:

(2)　$\sum_{j=0}^{\rho}d_{\rho-j}b_j=0\quad \rho\geqslant 1$

取一函数 $\rho(\omega_0)\in\mathscr{C}_0(R)$，$\rho(\omega)\geqslant 0$，$\int\rho(\omega)d\omega=1$，使得 $d_0=1,\ d_1,d_2,\cdots,d_m$ 为其矩量，即$\int\rho(\omega)\frac{\omega^k}{k!}d\omega=d_k,\ 0\leqslant k\leqslant m$(见[1]P.198)。

关于此函数 $\rho(\omega)$ 是否存在，书中末给出证明，也未提供有关文献，实际上，显然当 $m\geqslant 2$ 时，所要求的 $\rho(\omega)$是不存在的，因为若存在如上的 $\rho(\omega)$，用它乘恒等式

$$\sum_{k\in Z}\frac{k^2}{2!}\chi^{*(3)}(\omega-k)=b_2+b_1\frac{\omega}{1!}+\frac{\omega^2}{2!}$$

两端然后积分即得

$$\int\rho(\omega)\sum_{k\in Z}\frac{k^2}{2!}\chi^{*(3)}(\omega-k)d\omega=b_2+b_1d_1+d_2=0,$$

由于$\sum_{k\in Z}\frac{k^2}{2!}\chi^{*(3)}(\omega-k)>0$，$(\forall\omega\in R)$，故必须 $\rho(\omega)\equiv 0$，此和$\int\rho(\omega)d\omega=1$ 的假设矛盾，故所要求的 $\rho(\omega)$ 是不存在的，为了弥补该书在此处的缺陷，现在只有改变书中的命题，去掉其中要求 $\rho(\omega)\geqslant 0$ 的条件，我们有如下的命题：

命题1 存在 $\rho(x)\in\mathscr{D}(R)$，使它的前 $m+1$ 阶矩量为任意已给数组 $d_0=1,\ d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m$，即使$\int\rho(x)\frac{x^k}{k!}dx=d_k\quad(0\leqslant k\leqslant m)$。

证 首先我们取例1中函数 $\rho_0(x)\in\mathscr{D}(R)$，由它所决定的矩量序列为 $e_0=1,\ e_1,\ \cdots,\ e_m\cdots$，然后由方程组$d_j=\sum_{k=0}^{j}c_ke_{j-k}$，$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$相继决定数列

(3)　$c_0=1,c_1,c_2,\cdots,c_m,\cdots$

现在取一m次多项式$P(x)$使其在某有限区间譬如$[-1,1]$上的前$m+1$阶矩量为数列(3)中前$m+1$项，即有$\int\rho(x)\frac{x^k}{k!}dx=c_k(0\leqslant k\leqslant m)$。此多项式$P(x)$可这样构造，用$\tau_i^k$表示$\frac{x^k}{k!}$关于Legendre多项式列$\{P_n(x)\}$的Fourier系数，即$\tau_i^k=\int P_i(x)\frac{x^k}{k!}dx$；$\alpha_i$表示$P(x)$关于Legendre多项式列$\{P_n(x)\}$的Fourier系数，由方程组

(4) $$c_k=\sum_{i=0}^{k}\tau_i^k\alpha_i$$

相继决定出数组$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，于是多项式$P(x)=\alpha_0P_0(x)+\alpha_1P_1(x)+\cdots+\alpha_mP_m(x)$即是所求的多项式，将$P(x)$用0扩张到整个$\mathbf{R}$上，仍记为$P(x)$，于是$\theta(x)=\rho_0*P(x)$即是所求的函数。

应用[2]中所给的正定数列概念，采用以上的方法可以证明。

命题2　对于任意数组$d_0=1$，$d_1,d_2,\cdots,d_m$存在$\rho(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$，$\rho(x)\geqslant0$，$\int\rho(x)dx=1$，使得$\int\rho(x)\frac{x^k}{k!}dx=d_k$ $(0\leqslant k\leqslant m)$的充要条件是$d_0,1!d_1,2!d_2,\cdots,m!d_m$可以扩充成某有限区间上的正定数列。

参　考　文　献

[1] Jean Piere Aubin, Applied Functional Analysis.

[2] И. П. 纳唐松，函数构造论，中册。