第5卷 第4期 1985年10月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.4 Oct. 1985

关于同调维数若干命题的讨论*

徐金中 易忠

（广西师大数学系）

在[1]中，作者讨论了有限整体维数的半局部环上有限生成非零模的同调维数和余维数的和的性质；定义了模N的次全维数(pro-total dimension) ptd_SN、次整体维数(pro-global dimension) pgd_SN，以及半局部环S本身的全维数（total dimennsion) $\mathrm{td}S$；紧接着在§4讨论了上述各种维数之间的关系，然后在§6应用前面的结果去研究$\mathrm{td}S=2$的半局部环的结构。但我们发现[1]文中的某些结论不成立，本文试图举出[1]文中某些命题不成立的例子，并对这些命题进行适当的修改。同时还研究了$\mathrm{td}S=1,2,3$的半局部环的结构。

为了叙述方便，我们采用与[1]一致的概念和记号。半局部环S是仅有有限个极大理想的有单位元的交换Noether环，并且它的整体维数$\mathrm{gd}S<\infty$，所有的S-模都指有限生成的非零么模。

§0 [1]文中有关定义和结论

为方便起见，我们把[1]中有关定义和命题罗列如下，且仍按[1]的编号，但加“*”以区别于后面的结论。

命题3.1* 设S是半局部环，τ是它的Jacobson根，N是S-模，$\{u_1,\cdots,u_t\}$是τ中一个极大N-序列，则

(i) $\mathrm{hd}_SN_{(i)}+\mathrm{codim}_{S(i)}N_{(i)}=\mathrm{hd}_SN_{(j)}+\mathrm{codim}_{S(j)}N_{(j)}$；

(ii) $\mathrm{hd}_SN_{(i)}+\mathrm{cohd}_SN_{(i)}=\mathrm{hd}_SN_{(j)}+\mathrm{cohd}_SN_{(j)}$；其中$N_{(\ )}=N/_{(u_1,\cdots,u_i)}N$，$S(i)=S/_{(u_1,\cdots,u_i)}$，$N(0)=N$，$S(0)=S$，$1\leqslant i<j\leqslant t$。

定义3.2* 命题3.1*(i)中所示的共同值称为N的次全维数(pro-total dimension)，记为ptd_SN；命题3.1*(ii)中的共同值称为N的次整体维数(pro-global dimension)，记为pgd_SN。

定义3.3* $\sup\limits_N \mathrm{ptd}_SN$(其中$N$取遍所有的$S$-模)称为环$S$的全维数(total dimension)，记作$\mathrm{td}S$。

命题4.1* 对任意S-模N，下列不等式成立：

$$\mathrm{ptd}_SN\geqslant \mathrm{gd}S\geqslant \mathrm{pgd}_SN,$$

其中$\mathrm{gd}S$表示S的整体维数。

命题4.3* 半局部环S是局部的当且仅当

$$\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_SS.$$

* 1984年5月24日收到。

推论4.5* 对任意具有三个以上极大理想的半局部环S，必有

$$\mathrm{td}S>\mathrm{gd}S>\mathrm{cohd}_S S.$$

命题6.1* 设S是具有三个以上极大理想的半局部环，$\mathrm{td}S=2$，则S的完备化环$\hat{S}$同构于完备的主理想整环的直和。

命题6.2* 设S是具有三个以上极大理想的半局部环，$\mathrm{td}S=2$，则S是主理想环，且S恰好存在一个极大理想，它由S的一个零因子生成。

命题6.3* 设S是具有三个以上极大理想的半局部环，如果S还是主理想环，则$\mathrm{td}S=2$。

§1 [1]中命题4.1与命题4.3不成立的例

为了叙述清楚，分下面几个例子来说明：

例1 设Z是整数环，p是一素数，$m=(p)$是由p生成的Z的极大理想，$S=Z_m$表示Z关于m的分式环，则S是局部整环，并且整体维数$\mathrm{gd}S=1$。

证 首先，$S=\left\{\frac{b}{a}\middle|p\nmid a,\ b\in Z\right\}$是以$m_m=\left\{\frac{b}{a}\middle|p\nmid a,\ b\in m\right\}$为极大理想的局部环$\left([2],\ \S9.2\ \mathrm{prop}.2\right)$，显然$S$是交换整环。其次，$\frac{p}{1}$在$S$中无逆元，所以$S$不是域。又由于$S$是整环，所以，$S$不能是域的直和，从而$\mathrm{gd}S>0$（[2]，§9.1Thm.1），但$\mathrm{gd}Z_m\leqslant\mathrm{gd}Z$（[2]，§9.2Thm.8），$\mathrm{gd}Z=1$（[2]，§9.1Thm.5），所以，$\mathrm{gd}Z_m=\mathrm{gd}S=1$。

例2 设$\Lambda_i(i=1,2)$是分别以$m_i(i=1,2)$为极大理想的局部环，则$I_1=\Lambda_1\times m_2$，$I_2=m_1\times\Lambda_2$是环$S=\Lambda_1\times\Lambda_2$的仅有的两个极大理想，即$S$是半局部环，并且还有

$$S_{I_1}\cong\Lambda_2,\quad S_{I}\cong\Lambda_1.$$

证 我们只须证$S_{I_1}\cong\Lambda_2$，$S_{I_2}\cong\Lambda_1$即可，其它结论是显然的。因为

$$S_{I_1}=\left\{\frac{(\lambda_1,\lambda_2)}{(c_1,c_2)}\middle|\lambda_i\in\Lambda_i(i=1,2)c_1\in\Lambda_1,\ \ c_2\in\Lambda_2\backslash m_2\right\},$$

故S_{I_1}中任一元都可表成

$$\frac{(\lambda_1,\lambda_2)}{(c_1,c_3)}=\frac{(\lambda_1,\lambda_2)(0,1)}{(c_1,c_2)(0,1)}=\frac{(0,\lambda_2)}{(0,c_2)},\quad \lambda_i\in\Lambda_i\ (i=1,2),c_1\in\Lambda_1,c_2\in\Lambda_2\backslash m_2,$$

易知

$$\phi_1:\ S_{I_1}\longrightarrow(\Lambda_2)_{m_2},$$
$$\frac{(o,\lambda_2)}{(o,c_2)}\to\frac{\lambda_2}{c_2}$$

和

$$\phi_2:(\Lambda_2)_{m_2}\to\lambda_2$$
$$\frac{\lambda_2}{c_2}\longmapsto\lambda_2c_2^{-1}$$

都是环同构，故$S_{I_1}\cong(\Lambda_2)_{m_2}\cong\Lambda_2$。同理可证$S_{I_2}\cong\Lambda_1$。

例3 令$\Lambda_i=Z_{(P)}(i=1,2)$，Z是整数环，p是一素数，$S=\Lambda_1\times\Lambda_2$，则$\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_S S=1$，其中$\mathrm{pgd}_S S$是指在$S$的Jacobson根$\tau$中的极大$S$-序列的共同长度。

证 因$\mathrm{gd}S=\sup\limits_m\mathrm{gd}S_m$，故由例1，例2知

$$\mathrm{gd}S=\max\{\mathrm{gd}\Lambda_1,\mathrm{gd}\Lambda_2\}=1.$$

又因

$$\tau=(\Lambda_1\times m_2)\cap(M_1\times\Lambda_2)=M_1\times M_2=(p)_{(P)}\times(p)_{(P)},$$

故有 $u\in(p)_{(P)}$，$u\neq 0$ 和 $(u,u)\in\tau$，若 $(q_1,q_2)\in S=\Lambda_1\times\Lambda_2$ 使得 $(u,u)(q_1,q_2)=0$，则 $ug_1=ug_2=0$，因 Λ_1，Λ_2 是整环，故 $q_1=q_2=0$，即 $(u,u)\in\tau$ 不是 S 的零因子，这样便知 (u,u) 是一个 S-序列，因而 $\mathrm{cohd}_SS\geqslant 1$，故 $\mathrm{pgd}_SS=\mathrm{cohd}_SS\geqslant 1=\mathrm{gd}S$。设 $\{u_1,\cdots,u_t\}$ 是 τ 中一极大 S-序列，则 $\mathrm{cohd}_SS(t)=0$，因此 $\mathrm{pgd}_SS=\mathrm{hd}_SS(t)\leqslant\mathrm{gd}S$，所以，$\mathrm{pgd}_SS=\mathrm{gd}S=1$。

由于例 3 中 S 不是局部环，但 $\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_S^S$，所以，[1]中命题 4.3 的充分性不成立。

例4　令 $S=F\times Z_{(P)}$，其中 F 是一域，$Z_{(P)}$ 是例1中的局部环，由例 2 知 S 是以 $m_1=F\times(p)_{(P)}$，$m_2=0\times Z_{(P)}$ 为全部的极大理想的半局部环，并且还有 $S_{m_1}\cong Z_{(p)}$，$S_{m_2}\cong F$。取 $N=S/m_2$，则 N 是有限生成非零 S-模，因 $m_2=0\times Z_{(p)}$，所以，作为 S-模 $N=S/m_2\cong F$，它是 S 的一直和项，从而是投射 S-模，故 $\mathrm{hd}_SN=0$。另外，易知 $N_{m_1}=0$，因为

$$\mathrm{codim}_SN=\max\{\mathrm{codim}_{S_{m_1}}N_{m_1},\mathrm{codim}_{S_{m_2}}N_{m_2}\}=\mathrm{codim}_{S_{m_2}}N_{m_2}$$
$$=\mathrm{codim}_FN_{m_2}=0,\ ([1],\mathrm{prop}.1.4)$$

所以，$\mathrm{ptd}_SN=\mathrm{hd}_SN+\mathrm{codim}_SN=0$，但 $\mathrm{gd}S=\mathrm{gdz}_{(P)}=1$，所以，$\mathrm{ptd}_SN<\mathrm{gd}S$。从而[1]中命题4.1左边的不等式不成立，这个不等式不成立的原因是在[1]的证明中忽视了对 S 的某个极大理想 m，可能出现 $N_m=0$，而此时不能推出 $\mathrm{hd}_{S_m}N_m+\mathrm{codim}_{S_m}N_m=\mathrm{gd}S_m$。

但是，[1]中命题4.1右边的不等式是成立的，并且，我们可以把它改进为：

命题1.1　设 S 是半局部环，N 是 S-模，则 $\mathrm{gd}S\geqslant\mathrm{pgd}_SN$，且下列条件等价：

(i)　$\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_SS$；　(ii)　$\mathrm{gd}S=\mathrm{gd}S_m$，对 S 的任一极大理想 m 皆成立。

证　设 $\{u_1,\cdots,u_t\}$ 是 τ 中一极大 N-序列，则 $\mathrm{cohd}_SN_{(t)}=0$，所以 $\mathrm{pgd}_SN=\mathrm{hd}_SN_{(t)}\leqslant\mathrm{gd}S$。

(i)⇒(ii)　因为 $\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_SS=\mathrm{cohd}_SS=\inf\mathrm{cohd}_{S_m}S_m$ ([3], Ch.IV, Prop.9)，所以，对 S 的任一极大理想 m，必有 $\mathrm{gd}S_m\geqslant\inf\limits_m\mathrm{gd}S_m=\inf\limits_m\mathrm{cohd}_{S_m}S_m=\mathrm{gd}S$，另一方面，总有 $\mathrm{gd}S_m\leqslant\mathrm{gd}S$，因此，对 S 的任一极大理想 m，$\mathrm{gd}S=\mathrm{gd}S_m$。

(ii)⇒(i)　若对 S 的任一极大理想 m，都有 $\mathrm{gd}S=\mathrm{gd}S_m$，则

$$\mathrm{pgd}_SS=\mathrm{cohd}_SS=\inf_m\ \mathrm{cohd}_{S_m}S_m=\inf_m\ \mathrm{gd}S_m=\mathrm{gd}S,$$

即(i)成立，证毕。

§2　关于[1]中推论4.5的讨论

我们下面将举例说明[1]中推论4.5是不成立的，但我们可以把它修改为

命题2.1　设 S 是至少有两个极大理想的半局部环，$m_1,m_2,\cdots,m_t$ 是 S 的全部极大理想，且 $\mathrm{gd}S=\mathrm{gd}S_{m_1}\geqslant\mathrm{gd}S_{m_2}\geqslant\cdots\geqslant\mathrm{gd}S_{m_t}$，则

$$\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S+\mathrm{gd}S_{m_t}.$$

证　设 N 是任意非零有限生成 S-模。

i)　当 $\mathrm{codim}_{S_{m_1}}N_{m_1}>\mathrm{gd}S_{m_1}$ 时，若 $\mathrm{hd}_SN=\sup\limits_m\mathrm{hd}_{S_m}N_m=\mathrm{hd}_{S_{m_1}}N_{m_1}$，则得

$$\mathrm{ptd}_SN=\mathrm{hd}_SN+\mathrm{codim}_SN=\mathrm{hd}_{S_{m_1}}N_{m_1}+\sup_m\ \mathrm{codim}_{S_m}N_m,$$

因为 $\mathrm{codim}_{S_m}N_m \leqslant \mathrm{gd}S_m$，而 $\mathrm{codim}_{S_{m_1}}N_{m_1} > \mathrm{gd}S_{m_1}$，故

$$\sup \mathrm{codim}_{S_m}N_m = \mathrm{codim}_{S_{m_1}}N_{m_1}$$

于是得

$$\mathrm{ptd}_S N = \mathrm{hd}_{S_{m_1}}N_{m_1} + \sup_m \mathrm{codim}_{S_m}N_m = \mathrm{hd}_{S_{m_1}}N_{m_1} = \mathrm{codim}_{S_{m_1}}N_{m_1}$$

$$\leqslant \mathrm{gd}S_{m_1} \leqslant \mathrm{gd}S_{m_1} + \mathrm{gd}S_{m_2} = \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2}.$$

若 $\mathrm{hd}_S N = \sup\limits_m \mathrm{hd}_{S_m}N_m = \mathrm{hd}_{S_{m_i}}N_{m_i}\ (i \neq 1)$，则得

$$\mathrm{hd}_S N = \mathrm{hd}_{S_{m_i}}N_{m_i} \leqslant \mathrm{gd}S_{m_i} \leqslant \mathrm{gd}S_{m_2}\ (i \neq 1).$$

从而有

$$\mathrm{ptd}_S N = \mathrm{hd}_S N + \mathrm{codim}_S N \leqslant \mathrm{gd}S_{m_2} + \mathrm{codim}_S N$$

$$= \mathrm{gd}S_{m_2} + \mathrm{codim}_{S_{m_1}}N_{m_1} \leqslant \mathrm{gd}S_{m_2} + \mathrm{gd}S_{m_1} = \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2}.$$

ii) 当 $\mathrm{codim}_{S_{m_1}}N_{m_1} \leqslant \mathrm{gd}S_{m_1}$时，因 $\mathrm{codim}_{S_{m_i}}N_{m_i} \leqslant \mathrm{gd}S_{m_i}$故 $\mathrm{codim}_S N = \sup\limits_m \mathrm{codim}_{S_m}N_m \leqslant \mathrm{gd}S_{m_1}$，从而得

$$\mathrm{ptd}_S N = \mathrm{hd}_S N + \mathrm{codim}_S N \leqslant \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2}.$$

这样，总有 $\mathrm{ptd}_S N \leqslant \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2}$，由 N 的任意性及 tds 的定义，得 $\mathrm{td}S \leqslant \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2}$.

其次，取 $N = S \oplus S/m_1$，则 $\mathrm{hd}_S N = \mathrm{hd}_S S/m_1 = \mathrm{gd}S_{m_1} = \mathrm{gd}S$，

故$N_{m_2} = S_{m_2} \oplus (S/m_m)_{m_2} = S_{m_2}$　　　　　　$((S/S_m)_{m_2} = 0)$，

所以 $\mathrm{cod\ im}_S N = \sup\limits_m \mathrm{codim}_{S_m}N_m \geqslant \mathrm{codim}_{S_{m_2}}N_{m_2} = \mathrm{codim}_{S_{m_2}}S_{m_2} = \mathrm{gd}S_{m_2}$.

从而得

$$\mathrm{ptd}_S N = \mathrm{hd}_S N + \mathrm{codim}_S \mathrm{m} \geqslant \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2},$$

故 $\mathrm{td}S \geqslant \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2}$. 综合以上讨论，得 $\mathrm{td}S = \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2}$，证毕。

推论2.2 $\mathrm{td}S > \mathrm{gd}S \Longleftrightarrow S$ 至少有两个极大理想 m_1，m_2，使 $\mathrm{gd}S$ 　0和 $\mathrm{gd}S_{m_2} > 0$.

证 (⇐)若有m_1，m_2使 $\mathrm{gd}S_{m_1} > 0$ 和 $\mathrm{gd}S_{m_2} > 0$，不妨设$\mathrm{gd}S_{m_1}$ 　S_{m_2}，则由上面命题得

$$\mathrm{td}S \geqslant \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2} > \mathrm{gd}S.$$

(⇒)若 S 只有唯一极大理想，则 S 是此则局部环，从而，对任意有限生成的 S-模N，皆有$\mathrm{ptd}_S N = \mathrm{hd}_S N + \mathrm{codim}_S N \leqslant \mathrm{gd}S$，故$\mathrm{td}S \leqslant \mathrm{gd}S$，与 $\mathrm{td}S > \mathrm{gd}S$矛盾。因此，可以假定 S 至少有两个极大理想。令 $m_1, \cdots, m_t$是 S 的全部极大理想，不妨设$\mathrm{gd}S_{m_1} \geqslant \mathrm{gd}S_{m_2} \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{gd}S_{m_t}$.

若 $\mathrm{gd}S_{m_2} = 0$，则由命题2.1得 $\mathrm{td}S = \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_2} = \mathrm{gd}S$，与 $\mathrm{td}S > \mathrm{gd}S$ 矛盾。所以，$\mathrm{gd}S_{m_2} > 0$。因此，S 至少有两个极大理想 m_1，m_2 使 $\mathrm{gd}S_{m_2} > 0$ 和 $\mathrm{gd}S_{m_1} < \mathrm{gd}S_{m_2} > 0$，证毕。

下面举例说明[1]中推论4.5不成立。

例5 令 $S = Z_{(p)} \times F \times F$，其中 F 是域，$Z_{(p)}$ 是整数环 Z 关于它的由素数 p 生成的极大理想(p)的分式环。则S是有三个极大理想$m_1 = Z_{(p)} \times F \times 0$，$m_2 = Z_{(p)} \times 0 \times F$，$m_3 = (p)_{(p)} \times F \times F$的半局部环，由§1例2可知 $S_{m_1} \simeq F$，$S_{m_2} \simeq F$，$S_{m_3} \simeq Z_{(p)}$，故 $\mathrm{gd}S_{m_1} = \mathrm{gd}S_{m_2} = 0$，因此，由命题2.1得 $\mathrm{td}S = \mathrm{gd}S$，这样便看出[1]中推论 4.5 左边的不等式不成立。

例6 令 $S = Z_{(p)} \times Z_{(p)} \times Z_{(p)}$，$Z_{(p)}$ 是整数环 Z 关于由素数 p 生成的极大理想 (p) 的分式环，则 S 是具有三个极大理想 $m_1 = (p)_{(p)} \times Z_{(p)} \times Z_{(p)}$，$m_2 = Z_{(p)} \times (p)_{(p)} \times Z_{(p)}$，$m_3 = Z_{(p)} \times Z_{(p)} \times (p)_{(p)}$的半局部环。由§1例2可知 $S_{m_1} \simeq Z_{m_1}$，$S_{m_2} \simeq Z_{(p)}$，$S_{m_3} \simeq Z_{(p)}$，故 $\mathrm{gd}S_{m_1} = \mathrm{gd}S_{m_2} = \mathrm{gd}S_{m_3} = \mathrm{gd}Z_{(p)} = 1$。因此，由§1命题1.1知

$$\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_S S=\mathrm{cohd}_S S,$$

从而[1]中推论4.5右边的不等式也不成立。

§3　各种维数之间的关系和 $\mathrm{td}S=1,2,3$ 的环的结构

命题3.1　设 S 是至少有两个极大理想的半局部环，则 S 是半单环当且仅当 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_S S$。

证　($\Rightarrow$)　若 S 半单，则 $\mathrm{gd}S=0$，由 §2 命题 2.1 得 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S=0$。另外，对 S 的任一极大理想 m，$\mathrm{gd}S_m\leqslant \mathrm{gd}S=0$，故 $\mathrm{gd}\,S_m=\mathrm{gd}S=0$，由命题 1.1 得 $\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_S S$。所以，$\mathrm{gd}S=\mathrm{td}S=\mathrm{pgd}_S S$。

($\Leftarrow$) 若 S 不是半单的，则 $\mathrm{gd}S>0$，因 $\mathrm{gd}S=\mathrm{pgd}_S S$，由§1命题1.1知，对 S 的任一极大理想 m，$\mathrm{gd}S_m=\mathrm{gd}S>0$。及由§2命题2.1，则 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S+\mathrm{gd}S>\mathrm{gd}S$，与假设 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S$ 矛盾，故 S 是半单的。

命题3.2　$\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S$ 当且仅当 $S=S_0\times F_1\times\cdots\times F_t$，其中 $F_i(i=1,\cdots,t)$ 是域，S_0 是正则局部整环，且 $\mathrm{gd}S_0=\mathrm{gd}S$。

证　当 S 只有唯一极大理想时，命题显然成立，此时 $t=0$。

下面设 S 至少有两个极大理想。

($\Rightarrow$)　因我们总设 $\mathrm{gd}S<\infty$，从而 S 是正则环([4], Prop.4.5)，但 S 有分解 $S=S_0\times S_1\times\cdots\times S_t$，这里 $S_i(i=0,1,\cdots,t)$ 都是正则整环([4], Cor.4.4)，于是 $\mathrm{gd}S=\max\limits_i \mathrm{gd}S_i$，不妨设 $\mathrm{gd}S=\mathrm{gd}S_0$。

先证 S_0 是局部环，若不然，则 S_0 至少有两个极大理想。设 $m_0^{(1)}$，$m_0^{(2)}$，…，$m_0^{(n)}$ 是 S_0 的全部极大理想，且 $\mathrm{gd}S_0=\mathrm{gd}S_{0m_0^{(1)}}\geqslant \mathrm{gd}S_{0m_0^{(2)}}\geqslant\cdots\geqslant \mathrm{gd}S_{0m_0^{(n)}}$，由 §2 命题2.1，得 $\mathrm{td}S_0=\mathrm{gd}S_0+\mathrm{gd}S_{0m_0^{(2)}}$。若 $\mathrm{gd}S_{0m_0^{(2)}}>0$，则 $m'=m_0^{(2)}\times S_1\times\cdots\times S_t$ 是 S 的一极大理想，且

$$\mathrm{gd}S_{m'}=\mathrm{gd}S_{0m_0^{(2)}}\leqslant \mathrm{gd}\,S_{0m_0^{(1)}}=\mathrm{gd}S_m,$$

其中 $m=m_0^{(1)}\times S_1\times\cdots\times S_t$。又由命题2.1得 $\mathrm{td}S\geqslant \mathrm{gd}S+\mathrm{gd}S_{m'}=\mathrm{gd}S+\mathrm{gd}S_{0m_0^{(2)}}>\mathrm{gd}\,S$，与假设 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S$ 矛盾。故 $\mathrm{gd}S_{0m_0^{(2)}}=0$；但 S_0 是正则整环，因此，$S_{0m_0^{(2)}}$ 是正则整环，从而 $\dim S_{0m_0^{(2)}}=\mathrm{gd}S_{0m_0^{(2)}}=0$，于是 $(m_0^{(2)})_{m_0^{(2)}}=0$。否则，由 $(m_0^{(2)})_{m_0^{(2)}}\supset 0$ 知，$S_{0m_0^{(2)}}$ 的 Krull 维数至少为1。因 $(m_0^{(2)})_{m_0^{(2)}}=0$，对 $y(\neq 0)\in m_0^{(2)}$ 则 $\exists u\notin m_0^{(2)}$，使 $uy=0$，因 $u\notin m_0^{(2)}$，所以 $u\neq 0$，由 S_0 是整环得 $y=0$，与 y 的取法矛盾。所以，S_0 是局部环。

其次，证 $S_i(i>0)$ 是域。因 S_0 是局部环，且 S 至少有两个极大理想，故 $t>0$，若 S_1 不是域，因 S_1 是整环，它也不可能是域的直和，从而 $\mathrm{gd}S_1>0$。设 m_1 是 S_1 的一个极大理想，使 $\mathrm{gd}S_1=\mathrm{gd}S_{1m_1}$，则 $m'=S_0\times m_1\times S_2\times\cdots\times S_t$ 是 S 的一个极大理想。令 m_0 是 S_0 的唯一极大理想，则 $m=m_0\times S_1\times\cdots\times S_t$ 是 S 的一个极大理想。又因 $\mathrm{gd}S_{m'}=\mathrm{gd}S_{1m_1}=\mathrm{gd}S_1\leqslant \mathrm{gd}S=\mathrm{gd}S_0=\mathrm{gd}S_{0m_0}=\mathrm{gd}S_m$，所以，由命题 2.1 得

$$\mathrm{td}S\geqslant \mathrm{gd}S+\mathrm{gd}S_{m'}=\mathrm{gd}S+\mathrm{gd}S_1>\mathrm{gd}S$$

与假设 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S$ 矛盾，所以，S_1 是域。同理可证 $S_2,\cdots,S_t$ 都是域。

($\Leftarrow$)　设 m_0' 是 S_0 的唯一极大理想，则

$$m_0 = m_0' \times F_1 \times \cdots \times F_t$$

$$m_i = S_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{i-1} \times 0 \times F_{i+1} \times \cdots \times F_t \quad (1 \leqslant i \leqslant t)$$

是S的全部极大理想，因此，$\mathrm{gd}S_{m_i} = \mathrm{gd}F_i = 0\ (i = 1, \cdots, t)$．由命题2.1得 $\mathrm{td}S = \mathrm{gd}S + 0 = \mathrm{gd}S$，证毕．

命题3.3 若 S 是半局部环，则 $\mathrm{td}S = 1$ 当且仅当 $S = S_0 \times F_1 \times \cdots \times F_t$，其中 S_0 是正则局部主理想整环，但 S_0 不是域，$F_i\ (i = 1, \cdots, t)$ 是域．

证 （⇒）若S只有唯一极大理想，即S是局部环，则 $\mathrm{gd}S = \mathrm{td}S = 1$．因此，$\dim S = \mathrm{gd}S = 1$，所以，S是正则局部主理想整环（[5]，Ch.IV，Prop.7）．又因$\mathrm{gd}S = 1$．，所以 S 不是域．

下面，设S至少有两个极大理想．因$\mathrm{td}S = 1$，由命题2.1则得$\mathrm{gd}S = 1$，因此，$\mathrm{td}S = \mathrm{gd}S$，由命题3.2知，$S \cong S_0 \times F_1 \times \cdots \times F_t$，其中$F_i\ (i = 1, \cdots, t)$是域，$S_0$ 是正则局部整环，且 $\mathrm{gd}S_0 = \mathrm{gd}S = 1$．由上面的证明知，$S_0$ 是正则局部主理想整环，但S_0不是域．

（⇐）因S_0是正则局部主理想环，且 S_0 不是域，故 $\mathrm{gd}S_0 = 1$，显然$\mathrm{gd}S = \mathrm{gd}S_0 = 1$，这样 $S = S_0 \times F_1 \times \cdots \times F_t$适合命题 3.2 的条件，所以 $\mathrm{td}S = \mathrm{gd}S = 1$．

命题3.4 设S是半局部环，且$\mathrm{gd}S \leqslant 1$，则S同构于一些主理想整环的直和．

证 由于 S 是半局部环，设 S 的全部极大理想为 $m_1, \cdots, m_t$，则

$$\hat{S} \cong \hat{S}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \hat{S}_{m_t} \quad ([6],\ \text{Ch. II, Thm.17.7}).$$

因$\mathrm{gd}\hat{S}_{m_i} = \mathrm{gd}S_{m_i} \leqslant \mathrm{gd}S = 1$，故$\hat{S}_{m_i}$是整体维数$\leqslant 1$的正则局部环，因此$\dim \hat{S}_{m_i} = \mathrm{gd}\hat{S}_{m_i} = 1$，所以，$\hat{S}_{m_i}$是正则局部主理想整环（[5]，Ch.IV.Prop.7）．这样，$\hat{S}$是主理想整环的直和，从而$\hat{S}$是主理想环．设 I 是 S 的任一理想，则$I = \hat{I} \cap S$，因 $\hat{I}$ 是主理想，故 I 是主理想，因此，S 是主理想环．另外，由$\mathrm{gd}S \leqslant 1$知S是正则环（[4]，Prop.4.5），所以，S是正则整环的直和（[4]，Cor.4.4），即

$$S \cong S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_t,$$

其中 $S_i\ (i = 0, \cdots, t)$ 都是正则整环．但 S 是主理想环，所以，每个 $S_i\ (i = 0, 1, \cdots, t)$ 也是主理想环，从而每个$S_i\ (i = 0, \cdots, t)$是主理想整环．这样，便证得 S 同构于主理想环的直和．

命题3.5 设S是半局部环，$\mathrm{td}S = 2$，则S是有限个主理想整环的直和，或者$S \cong S_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_t$，其中$S_0$是整体维数为2的局部环，$F_i\ (i = 1, \cdots, t)$是域．

证 当S只有唯一极大理想，即 S 是局部环时，$\mathrm{gd}S = \mathrm{td}S = 2$，命题显然真．下面设S至少有两个极大理想．

因$\mathrm{td}S = 2$，由命题2.1知，$\mathrm{gd}S = \mathrm{td}S = 2$，或者$\mathrm{gd}S = 1$．

当$\mathrm{gd}S = 1$时，由命题3.4知，S同构于有限个主理想整环的直和．

当$\mathrm{gd}S = \mathrm{td}S = 2$时，由命题3.2得$S \cong S_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_t$其中$S_0$是局部环，且 $\mathrm{gd}S_0 = \mathrm{gd}S = 2$，$F_i\ (i = 1, \cdots, t)$是域．

命题3.6 设S是半局部环，$\mathrm{td}S = 3$，则$S \cong S_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_t$，其中$S_0$是局部环，$\mathrm{gd}S_0 = 3$，$F_i\ (i = 1, \cdots, t)$是域，或者 $S \cong S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_t$，其中 $\mathrm{gd}S_0 = 2$，$S_i\ (i = 1, \cdots, t)$是主理想整环．

证 当 S 是局部环时，命题显然成立．下面，设 S 至少有两个极大理想，因 $\mathrm{td}S = 3$，由命题2.1知 $\mathrm{td}S = \mathrm{gd}S = 3$，或者 $\mathrm{gd}S = 2$．

当 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S=3$ 时，由命题3.2知 $S\simeq S_0\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_t$，其中 S_0 是局部环，且 $\mathrm{gd}S_0=\mathrm{gd}S=3$，$F_i(i=1,\cdots t,)$ 是域。

当 $\mathrm{gd}S=2$ 时，则 S 有分解 $S=S_0\oplus S_1\oplus\cdots\oplus S_t$，其中 $S_i(i=0,1,\cdots,t)$ 是整环([4]，Cor.4.4)。因 $\mathrm{gd}S=\sup_i \mathrm{gd}S_i$ 不妨设 $\mathrm{gd}S=\mathrm{gd}S_0=2$，则 S_0 有极大理想 m_0'，使得 $\mathrm{gd}S_{0m_0'}=\mathrm{gd}S_0=2$。任取 $S_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 的一极大理想 m_i' 因为 $m_0=m_0'\oplus S_1\oplus\cdots\oplus S_t$，$m_i=S_0\oplus S_1\oplus\cdots\oplus S_{i-1}\oplus m_i'\oplus S_{i+1}\oplus\cdots\oplus S_t$ 都是 S 的极大理想，且 $\mathrm{gd}S_{m_i}\leqslant\mathrm{gd}S=\mathrm{gd}S_0=\mathrm{gd}S_{0m_0'}=\mathrm{gd}S_0$，故命题 2.1 得 $3=\mathrm{td}S\geqslant\mathrm{gd}S+\mathrm{gd}S_{m_i}=2+\mathrm{gd}S_{m_i}$，所以，$\mathrm{gd}S_{m_i}\leqslant1$，从而 $\mathrm{gd}S_{im_i'}=\mathrm{gd}S_{m_i}\leqslant1$，由于 m_i' 是 S_i 的任一极大理想，故 $\mathrm{gd}S_i\leqslant1$。再由命题 3.4知，$S_i(i=1,\cdots,t)$ 同构于主理想整环的直和，但 $S_i(i=1,\cdots,t)$ 本身已是整环，它的直和分解式中不可能有多于或等于两个的直和项，从而 $S_i(i=1,\cdots,t)$ 是主理想整环。

§4 关于[1]中命题6.1、命题6.2和命题6.3的讨论

本节中我们用几个例子说明[1]中命提6.1，命题 6.2 和命题 6.3 都不成立，然后，给出关于这些命题修改之后的结论。

例7 令 $S=R\oplus F\oplus F$，其中 F 是域，R 是正则局部环，$\mathrm{gd}R=2$。设 R 的唯一极大理想为 m，则 S 是半局部环，它共有三个极大理想：$m_1=m\oplus F\oplus F$，$m_2=R\oplus0\oplus F$，$m_3=R\oplus F\oplus0$。因为 $\mathrm{gd}S_{m_1}=\mathrm{gd}R_m=\mathrm{gd}R=2,\mathrm{gd}S_{m_2}=\mathrm{gd}S_{m_3}=\mathrm{gd}F=0$，所以 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S=\mathrm{gd}R=2$ (命题2.1)。

我们断定 $\hat{S}$ 不是主理想整环的直和，否则 $\mathrm{gd}\,\hat{S}\leqslant1$（[2]，§9.1 Thm. 4)。但 $\hat{S}=\hat{R}\oplus\hat{F}\oplus\hat{S}$，所以，$\mathrm{gd}\hat{S}\geqslant\mathrm{gd}\hat{R}=\mathrm{gd}R=2$（[4]，Thm.3.2)，这就得到矛盾。所以，$\hat{S}$ 不是主理想整环的直和，从而，[1]中命题6.1不成立。

另外，S 可表成整环的直和，([4]，Cor.4.4)，若 S 是主理想环，则 S 可表成主理想整环的直和，因此 $\mathrm{gd}S\leqslant1$([2]，§9.1，Thm.4)，这与 $\mathrm{gd}S=2$ 矛盾。所以，S 不是主理想环，从而[1]中命题 6.2 的第一个结论不真。

再者，$(1,1,0)$，$(1,0,1)\in S$ 都是 S 的零因子，且 m_2 由 $(1,0,1)$ 生成，m_3 由 $(1,1,0)$ 生成。因此，S 至少有两个极大理想是由 S 的零因子生成。所以[1]中命题6.2的后一部分也不成立。

例8 令 $S=F\oplus F\oplus F$，其中 F 是域，显然 S 是有三个极大理想的半局部环，且 S 是主理想环。但由命题 2.1 知 $\mathrm{td}S=\mathrm{gd}S=0$，所以，[1]中命题 6.3 不成立。

上面的例子说明，[1]中命题6.1、命题6.2和命题6.3都不成立。下面，我们给出这些命题修改后的结论，

修改[1]中命题 6.1 和命题6.2，我们得到

命题4.1 设 S 是半局部环，$\mathrm{td}S=2$，且有两个极大理想 m_1，m_2，使得 $\mathrm{gd}S_{m_1}>0$，$\mathrm{gd}S_{m_2}>0$，则 S 和 $\hat{S}$ 都是主理想整环的直和。

证 不妨设 $\mathrm{gd}S_{m_1}\geqslant\mathrm{gd}S_{m_2}>0$，由命题 2.1 得

$$2=\mathrm{td}S\geqslant\mathrm{gd}S+\mathrm{gd}S_{m_2}>\mathrm{gd}S\geqslant\mathrm{gd}S_{m_2}>0,$$

所以，$\mathrm{gd}S=1$，由命题3.4知S是主理想整环的直和。另外，$\hat{S}$ 也是半局部环，且 $\mathrm{td}\hat{S}=\mathrm{td}S=2$([1]，Prop.5.2)。设 m_1，$\cdots,m_2$ 是 S 的全部极大理想，则 $\hat{S}=\hat{S}_{m_1}\oplus\cdots\oplus\hat{S}_{m_2}$([6]，Ch.

Ⅱ, Thm. 17.7)，因$(\hat{m}_1)_{m_1}$是$\hat{S}_{m_1}$的唯一极大理想，$(\hat{m}_2)_{m_1}$是$\hat{S}_{m_1}$的唯一极大理想，所以$m' = (\hat{m}_1)_{m_1} \oplus \hat{S}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \hat{S}_{m_t}$，$m'' = \hat{S}_{m_1} \oplus (\hat{m}_2)_{m_1} \oplus \hat{S}_{m_2} \oplus \cdots \hat{S}_{m_t}$是$\hat{S}$的两个极大理想，并且适合

$$\mathrm{gd}\hat{S}_{m'} = \mathrm{gd}\hat{S}_{m_1(\hat{m}_1)m_1} = \mathrm{gd}\hat{S}_{m_1} = \mathrm{gd}S_{m_1} > 0,$$

$$\mathrm{gd}\hat{S}_{m''} = \mathrm{gd}\hat{S}_{m_1(\hat{m}_2)m_1} = \mathrm{gd}\hat{S}_{m_1} = \mathrm{gd}S_{m_1} > 0,$$

又因$\mathrm{td}\hat{S} = 2$，所以，由命题2.1得$\mathrm{gd}\hat{S} = 1$，从而由命题3.4知$\hat{S}$是主理想整环的直和。证毕。

修改[1]中命题6.3，得到

命题4.2 令S是半局部环，且是主理想环，若S有两个极大理想m_1和m_2，使得$\mathrm{gd}S_{m_1} > 0$，$\mathrm{gd}S_{m_2} > 0$，则$\mathrm{td}S = 2$。

证 首先，S可写成整环的直和([4]，Cor. 4.4)，但已知S是主理想环，故S是主理想整环的直和，于是$\mathrm{gd}S \leqslant 1$ ([2]，§9.1 Thm. 4)。再由$\mathrm{gd}S_{m_1} > 0$，故$\mathrm{gd}S = 1$。又因$\mathrm{gd}S_{m_1} > 0$，所以$\mathrm{gd}S_{m_1} = 1$。同样，也有$\mathrm{gd}S_{m_2} = 1$。于是$\mathrm{gd}S_{m_1} = 1 \leqslant \mathrm{gd}S_{m_2} = \mathrm{gd}S$，由命题2.1，得

$$\mathrm{td}S \geqslant \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S_{m_1} = 1 + 1 = 2,$$

但，$\mathrm{td}S \leqslant \mathrm{gd}S + \mathrm{gd}S = 2$，故$\mathrm{td}S = 2$，证毕。

参 考 文 献

[1] Samuel. S. H. Young, On the sum of homological dimension and codimension of modules over a semi-local ring, *Nagoya Math*. J. Vol. 33(1968), 165—172.

[2] Northcott, D .G. An introduction to homological alegbra, Cambridge university press (1966).

[3] Serre, J. P. Local algèbre-multiplitès, Springer-verlag (1965).

[4] Auslander M. and Buchsbaum, D.A., Homological dimension in local rings, *TAMS*, 85(1957), PP.390—405.

[5] Northcott, D. G. Ideal Theory, Cambridge, 1953.

[6] Nagata, M, Local Rings, Interscience, 1962.