第5卷 第4期
1985年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.4
Oct. 1985

关于广义对角占优矩阵*

杨载朴

（淮南矿业学院）

设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 为 n 阶复矩阵（本文记为 $A\in C^{n\times n}$），记

$$\sigma_j=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|a_{jk}|,\quad j=1,\cdots,n. \tag{1}$$

若 $|a_{jj}|>\sigma_j$，$j=1,\cdots,n$，则称 A 为（按行）严格对角占优矩阵。若 $\hat{A}=\frac{1}{2}(A+A^*)$ 为严格对角占优矩阵，则称 A 为共轭（严格）对角占优矩阵.关于各类对角占优矩阵特征值的分布，已在文献[1][2]中作了研究，本文在此基础上对范围更广的两类矩阵的特征值分布取得一些结果，并且进一步分析了一类矩阵的一些性质。

§1 广义对角占优矩阵特征值的分布

定义1 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in C^{n\times n}$，（$n\geqslant 2$，下同）若对任意 j，k（$1\leqslant j$, $k\leqslant n$; $j\neq k$），均有 $|a_{jj}a_{kk}|>\sigma_j\sigma_k$，其中 σ_j,σ_k 如(1)所示，则称 A 为广义对角占优矩阵，记为 $A\in\mathrm{GD}$.

显然，此定义是严格对角占优矩阵的定义的推广，此矩阵类与[1]中所定义的准对角占优矩阵类也互不包含。

本文中，A 的特征值的全体记为 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$.

定理1 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in\mathrm{GD}$，且其对角线元素皆为实数，$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，若 $a_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)>0$，$m=1,\cdots,n$；若 $a_{jj}<0$，$j=1,\cdots,n$，则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)<0$，$m=1,\cdots,n$.

证 若 $a_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，用反证法。设 $\lambda=a+bi$ 为 A 的任一特征值，其中 $a\leqslant 0$. 由矩阵特征值的卵形定理[3]，λ 必在 A 的某一个卵形

$$O_{jk}=\{z|\ |z-a_{jj}||z-a_{kk}|\leqslant\sigma_j\sigma_k\}$$

之中，（其中 $j\neq k$），即

$$|\lambda-a_{jj}||\lambda-a_{kk}|\leqslant\sigma_j\sigma_k. \tag{2}$$

而

$$|a-a_{jj}|=a_{jj}-a\geqslant a_{jj}=|a_{jj}|,$$

因而

$$|\lambda-a_{jj}|=|(a+bi)-a_{jj}|=\sqrt{(a-a_{jj})^2+b^2}\geqslant|a-a_{jj}|\geqslant|a_{jj}|.$$

同理，

$$|\lambda-a_{kk}|\geqslant|a_{kk}|.$$

因此，$|\lambda-a_{jj}||\lambda-a_{kk}|\geqslant|a_{jj}||a_{kk}|=|a_{jj}a_{kk}|>\sigma_j\sigma_k$，与(2)矛盾。说明此时 A 的特征值之实部皆为正。

*1982年9月6日收到.

同理可证，若 $a_{jj}<0$，$j=1,\cdots,n$，则A的特征值之实部皆为负。

例 1

$$A_1=\begin{pmatrix}4.2 & 2 & i\\ 2 & 3 & \sqrt{2}(1+i)\\ 0 & 2 & 3.1\end{pmatrix}.$$

$a_{11}=4.2$，$a_{22}=3$，$a_{33}=3.1$ 皆为正数。$\sigma_1=3$，$\sigma_2=4$，$\sigma_3=2$，所以 $|a_{11}a_{22}|>\sigma_1\sigma_2$ $|a_{11}a_{33}|>\sigma_1\sigma_3$，$|a_{22}a_{33}|>\sigma_2\sigma_3$，因此 $A_1\in$**GD**. 据定理1，A_1的特征值之实部皆为正。而用[1]中方法不能得此结果。

因 Hermite 矩阵的特征值均为实数，所以由定理1可得：

推论 1 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 为广义对角占优 Hermite 矩阵，若 $a_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，则A为正定型；若 $a_{jj}<0$，$j=1,\cdots,n$，则A为负定型。

推论 2 设 $B=(b_{jk})_{n\times n}$ 为广义对角占优实矩阵，且 $b_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，则 $\det B>0$。

证 由定理1知，B的特征值之实部皆为正。又因B为实矩阵，其虚特征值必成共轭对出现。故可设B的特征值为：

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_l;\quad a_1\pm b_1 i,\ \cdots,\ a_m\pm b_m i,$$

其中，$\lambda_1,\cdots,\lambda_l$；$a_1,\cdots,a_m$均为正数，$l+2m=n$。

$$\det B=\prod_{j=1}^{l}\lambda_j\prod_{k=1}^{m}(a_k+b_k i)(a_k-b_k i)=\prod_{j=1}^{l}\lambda_j\prod_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2)>0,\ \text{证毕。}$$

上述定义还可推广如下：

定义 2 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in C^{n\times n}$，若$A$可经一系列形如 $k(j)$，$\frac{1}{k}\overset{\frown}{\underset{\smile}{j}}$ 的变换（即将第j行元素乘以k，再将第j列元素乘以$\frac{1}{k}$）化为广义对角占优矩阵，则称A为广义准对角占优矩阵。

此时有下列结果：

定理 1a 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 为广义准对角占优矩阵，且对角线元素皆为实数，$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，若 $a_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)>0$，$m=1,\cdots,n$；若 $a_{jj}<0$，$j=1,\cdots,n$，则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)<0$，$m=1,\cdots,n$。

证 由定义2，存在非异对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & d_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{pmatrix}$$

使 $DAD^{-1}=B$ 为广义对角占优矩阵，显然，A与B特征值相同，对角线元素亦相同，由定理1知，若 $a_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，则B的特征值（亦为A的特征值）之实部皆为正，若 $a_{jj}<0$，$j=1,\cdots,n$，则A的特征值之实部皆为负。

§2 广义共轭对角占优矩阵特征值的分布

定义 3 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in C^{n\times n}$，若 $\hat{A}=\frac{1}{2}(A+A^*)$ 为广义对角占优矩阵，则称A为广义共轭对角占优矩阵，记为 $A\in$**GC**，其中 A^*表示A的共轭转置矩阵。

显然，$\hat{A}$ 的对角线元素皆为实数。

定理 2 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in GC$，$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，若 $\mathrm{Re}(a_{jj})>0$，$j=1,\cdots,n$，则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)>0$，$m=1,\cdots,n$；若 $\mathrm{Re}(a_{jj})<0$，$j=1,\cdots,n$，则 $\mathrm{Re}(\lambda_m)<0$，$m=1,\cdots,n$。

证　记 $\hat{A}=\frac{1}{2}(A+A^*)=(\hat{a}_{jk})_{n\times n}$，其特征值记为 $\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_n$，因$A$为广义共轭对角占优矩阵，又因 $\hat{A}=\hat{A}^*$，由定义3，$\hat{A}$ 为广义对角占优 Hermite矩阵，且 $\hat{a}_{jj}=\frac{1}{2}(a_{jj}+\bar{a}_{jj})=\mathrm{Re}(a_{jj})$，由推论1，若 $\hat{a}_{jj}=\mathrm{Re}(a_{jj})>0$，$j=1,\cdots,n$，则 $\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_n$ 皆为正数，又因对A的任一特征值 λ_m，有[3，P.211]

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}(\hat{\lambda}_j)\leqslant\mathrm{Re}(\lambda_m)\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}(\hat{\lambda}_j)$$

因此 $\mathrm{Re}(\lambda_m)>0$。由 λ_m 的任意性知 $\mathrm{Re}(\lambda_m)>0$，$m=1,\cdots,n$。

同理可证，若 $Re(a_{jj})<0$，$j=1,\cdots,n$，则 $Re(\lambda_m)<0$，$m=1,\cdots,n$。

例 2

$$A_2=\begin{pmatrix}4+2i & 3-i & 0\\ 1-i & 3-i & 2-i\\ 0 & 2-i & 5+3i\end{pmatrix},\ A_2^*=\begin{pmatrix}4-2i & 1+i & 0\\ 3+i & 3+i & 2+i\\ 0 & 2+i & 5-3i\end{pmatrix},\ \hat{A}_2=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

因 $\hat{A}_2\in GD$，从而 $A_2\in GC$，又因 A_2 的对角线元素之实部皆为正，因而 A_2 的特征值之实部皆为正。（此时，$\hat{A}_2$ 的特征值亦均为正）而用 [2] 中的方法不能得此结果。

由于 A^T 和A的特征值相同，因而 §1，§2 中的结果对列同样成立。另外，用上面之结果于 $i\ A$ 可得到A的特征虚部的相应估计。

§3　一些其它性质

因广义对角占优矩阵是严格对角占优矩阵的推广，所以下列结果对严格对角占优矩阵亦成立。

定理 3　设 $A=(a_{jk})_{n\times n}\in GD$，若 $D=\mathrm{diag}A$，$C=A-D$，$B=D^{-1}C$，则 $\rho(B)<1$，其中 $\rho(B)$为B的谱半径(即B的特征值模的最大值)。

证　首先注意到，由定义1知，对任意 $j,k(1\leqslant j,\ k\leqslant n;\ j\neq k)$，$|a_{jj}a_{kk}|>\sigma_{jj}\sigma_{kk}|\geqslant 0$，因此 $a_{jj}\neq 0$，$j=1,\cdots,n$，而

$$D=\mathrm{diag}A=\begin{pmatrix}a_{11} & & 0\\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}\end{pmatrix},\ \text{因而}\ D^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11}^{-1} & & 0\\ & a_{22}^{-1} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{-1}\end{pmatrix}\text{存在，}$$

$$C=A-D=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \cdots\cdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & & 0\end{pmatrix},\quad B=D^{-1}C=\begin{pmatrix}0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}}\\ & \cdots\cdots & \ddots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

所以$\sigma_j(B)=\frac{\sigma_j(A)}{a_{jj}}$，$j=1,\cdots,n$。设$\lambda$为$B$的任一特征值，由卵形定理知，必有 j，k $(1\leqslant j,\ k\leqslant n;\ j\neq k)$使

$$|\lambda-0||\lambda-0|\leqslant\sigma_j(B)\sigma_k(B)=\frac{\sigma_j(A)}{|a_{jj}|}\cdot\frac{\sigma_k(A)}{|a_{kk}|}<1,$$

即$|\lambda|^2<1$，因而$|\lambda|<1$。由λ的任意性知$\rho(B)<1$，证毕。

定理 4 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 为广义对角占优实矩阵，且 $a_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，则

(i) A 的所有主子式皆为正，特别地，A 的所有顺序主子式皆为正.

(ii) A^{-1} 存在，且 A^{-1} 对角线元素皆为正.

证 (i) 任取 A 的一个 k 阶主子式，若 $k=1$，结论显然正确，今设 $2\leqslant k\leqslant n$，对应的矩阵为：

$$D=\begin{pmatrix} a_{j1j1} & a_{j1j2} & \cdots & a_{j1jk} \\ a_{j2j1} & a_{j2j2} & \cdots & a_{j2jk} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{jkj1} & a_{jkj2} & \cdots & a_{jkjk} \end{pmatrix}, \text{其中 } 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n.$$

因 D 的第 m 行是由 A 的第 j_m 行去掉若干非对角线元素而得到，因此

$$\sigma_{j_m}(A)\geqslant\sigma_m(D), \qquad m=1,\cdots,k.$$

所以对任意 p，$m(1\leqslant p,\ m\leqslant k;\ p\neq m)$ 有

$$|a_{j_pj_p}a_{j_mj_m}|>\sigma_{j_p}(A)\sigma_{j_m}(A)\geqslant\sigma_p(D)\sigma_m(D).$$

因而 D 为广义对角占优实矩阵，又因 D 的对角线元素（亦为 A 的对角线元素）皆为正，由推论2，$detD>0$.

(ii) 由于 $detA\neq 0$，所以 A^{-1} 存在，且

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & & * \\ & A_{22} & \\ & & \ddots & \\ * & & & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_{jj} 为 A 的元素 a_{jj} 的代数余子式，由 (i) 显然有 $A_{jj}>0$，$j=1,\cdots,n$，而 $detA>0$，从而 A^{-1} 对角线元素皆为正.

参 考 文 献

[1] 佟文廷，关于几类矩阵的特征值分布，数学学报，20：4(1977)，pp，272—275，

[2] 张家驹，共轭对角占优矩阵的特征值分布，数学学报，23：4(1980)，pp，544—546.

[3] Pullman, N. J., Matrix Theory and Applications, Marcel Dekker Inc, New York and Basel. (1976), pp. 209—227.

On Generalized Diagonal Dominance Matrix

Yang Zaipu

Abstract

In this paper, we define two classes of matrices (GD and GC), one of which is more general than class of diagonal dominance matrices, and we obtain the following theorems

Theorem 1 Suppose $A=(a_{jk})_{n\times n}\in GD$, and all diagonal elements a_{jj} of A are real, and $\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. If $a_{jj}>0$, $j=1,\cdots,n$, then Re $(\lambda_m)>0$, $m=1,\cdots,n$; if $a_{jj}<0$, $j=1,\cdots,n$, then Re$(\lambda_m)<0$, $m=1,\cdots,n$.

Teorem 2 Suppose $A=(a_{jk})_{n\times n}\in GC$, and $\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. If Re$(a_{jj})>0$, $j=1,\cdots,n$, then Re$(\lambda_m)>0$, $m=1,\cdots,n$; if Re$(a_{jj})<0$, $j=1,\cdots,n$, then Re$(\lambda_m)<0$, $m=1,\cdots,n$.

Theorem 3 Suppoee $A=(a_{jk})_{n\times n}\in GD$, and $D=$ diag A, $C=A-D$, $B=D^{-1}C$. Then $\rho(B)<1$, where $\rho(B)$ is spectral radius of B.