第5卷 第4期
1985年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.4
Oct. 1985

求最优权对集的一个对偶算法*

刘桂真

（山东大学数学研究所）

1. 引言

Edmonds 给出了求一个图的最大权对集的算法[8]它是从一个满足原始对偶可行的解出发使其逐步满足互补松弛条件. [1]描述了一个求最大权完美对集原始算法. 它是从一个满足互补松弛条件的原始可行解出发，使其逐步满足对偶可行条件. 我们给出一个求图的最大权完美对集的对偶算法，它是从一个满足互补松弛条件的对偶可行解出发使其逐步满足可行条件. 本算法开始不要求给出图的一个完全对集，其对偶变量的改变法则也较[1]中的法则简单得多. 其基本方法仍是用 Edmonds 的花的算法[2]. 我们将说明本文的算法可用来解其他的最优对集问题. 本文中采用的术语参看[2].

2. 最大权完美对集的线性规划表示

给定有限图G，不妨假定G是简单的，对G的每条边$e\in E(G)$对应一个实数权c. 求G的最大权完美对集即求G的一个完美对集M使对G的任意完美对集M'都有$\sum_{e\in M}c\geqslant\sum_{e\in M'}c$.

为了解最大权完美对集问题，首先研究它与下面线性规划的关系.

设实变量$x=\varphi(e)$对应图G的边$e\in E(G)$. 令$E(x)=\{x|x=\varphi(e),e\in E(G)\}$，对$\forall v\in V(G)$，令$V(x)=\{x|x=\varphi(e)$，$e\in E(G)$且$e$与$v$关联$\}$. 令$Q=\{S\ |s|=2r+1$，$r>0$是整数，$S\in V(G)\}$，对$\forall S\in Q$设$S(x)=\{x|x=\varphi(e)$，$e=v_1v_2\in E(G)$，$v_1,v_2\in S\}$.

问题 I $\max w=\max\sum_{x\in E(x)}cx$，$x$满足下列约束：

〈1〉$x\geqslant 0$对$\forall x\in E(x)$；〈2〉$\sum_{x\in V(x)}x=1$对$\forall v\in V(G)$；〈3〉$\sum_{x\in S(x)}x\leqslant r$对$\forall S\in Q$.

注意这里〈1〉，〈2〉并不隐含着〈3〉，例如G是一个三角形，对应每边取$x=\frac{1}{2}$则x满足〈1〉，〈2〉但不满足〈3〉. 对应每个$S\in Q$引进变量z，对应G中的每个顶点引进变量y，则问题I的对偶规划为：

问题 II $\min u=\min(\sum_{v\in V(G)}y+\sum_{S\in Q}rz)$，$y$，$z$满足下列约束：

〈4〉对$\forall S\in Q$，$z\geqslant 0$；〈5〉对$\forall e=v_1v_2\in E(G)$，$y_1+y_2+\sum_{v_1v_2\in S}z\geqslant C$.

我们分别用〈x〉和〈y，z〉表示分量为x和y，z的向量，设$C\{\langle x\rangle|\langle x\rangle$是问题 I 的可行解$\}$. 若$\langle x\rangle\in C$且〈$y$，$z$〉是问题 II 的可行解且它们满足互补松弛条件：$x>0$时$y_1+y_2+\sum_{v_1v_2\in S}z=C$；$z>0$时$\sum_{x\in S(x)}x=r$，则〈$x$〉和〈$y$，$z$〉分别是问题 I 和 II 的最优解[4].

*1981年9月15日收到，1982年4月6日收到修改稿.

若G有完美对集，设M是G的任一完美对集，令$\langle x\rangle$是对应于M的向量，它的分量是0或1且$x=1$当且仅当$e\in M$，我们称这样的$\langle x\rangle$为完美对集向量。设$P=\{\langle x\rangle \mid \langle x\rangle$是$G$的完美对集向量$\}$，显然对$\forall \langle x\rangle \in P$有$\langle x\rangle \in D$，但反之任一$\langle x\rangle \in C$并不一定有$\langle x\rangle \in P$。实际上$P$中的向量仅是问题Ⅰ的整数解。这样若$\langle x\rangle$是问题$I$的最优解且有$\langle x\rangle \in P$，则易见$\langle x\rangle$对应的完美对集$M$是$G$的最大权完美对集。于是下面的定理成立。

定理1 设M是G的完美对集。若$\exists\langle y, z\rangle$满足与〈4〉与〈5〉且下列条件成立：

〈6〉 $e\in M$，$e=v_1v_2$则$y_1+y_2+\sum\limits_{v_iv_i\in S} z=C$，

〈7〉 $z>0$则S含M中r条边的端点，

则M是G的最大权完美对象。

3. 算法

本节我们描述一个求最大权完美对集的算法，其中关于路、树、花的定义及生长树的子程序与[2]中相同。图G_i的顶点和边分别记为v^i，e^i，它们分别是图G中顶点v和边e在G_i中的象。M_i是G_i的对集。

step0（开始）。取$n=0$，$G_n=G_0=G$，$M_n=M_0=\varnothing$，对$\forall v\in V(G)$

令 $y=\frac{1}{2}\max\limits_{e\in E(G)}\{C\}$，对 $\forall S\in Q$ 令 $z=0$。

step1（检查）。若G_n只有一个暴露顶点结束，G无完美对集。否则，M_n是G_n的完美对集转stop6，若M_n不是G_n的完美对集转step2。

step2（生长树）。令G'_n是G_n的支撑子图，其边集为所有满足$y_1+y_2+\sum\limits_{v_iv_i\in S} z=C$的$G$的边在$G_n$中的象组成，任取$G'_n$的一个暴露顶点$\gamma=v^n$，在$G'_n$中生长一棵以$\gamma$为根的种上的树，若出现增广路转step3，若出现花B_n转step4，若出现匈牙利桥转step5。

step3（增广）。设P_n是增广路，令$M_n:=M_n\triangle P_n$转回step1。

step4（收缩）。在G_n中收缩花B_n为点u^{n+1}，所得之图记为G_{n+1}，G'_{n+1}是G'_n在G_{n+1}中的象，令$n:=n+1$转回step2。

step5（改变对偶变量）。设G'_n的匈牙利树是J_n，对$\forall e^n\in E(G_n)$，若$e=v_1v_2\in E(G)$，令$\triangle=y_1+y_2+\sum\limits_{v_iv_i\in S} z-C$。

记$\delta_1=\min\limits_{e^n\in E_n^1}\{\triangle\}$。若$E_n^1=\varnothing$令$\delta_1=+\infty$，其中$E_n^1=\{e^n\mid e^n=v_1^nv_2^n$，$v_1^n$是$J_n$的外点，$v_2^n$不是$J_n$的顶点$\}$。记$\delta_2=\min\limits_{e^n\in E_n^2}\left\{\frac{1}{2}\triangle\right\}$。若$E_n^2=\varnothing$令$\delta_2=+\infty$，其中$E_n^2=\{e^n\mid e^n=v_1^nv_2^n$，$v_1^n$和$v_2^n$是$J_n$的外点$\}$。

记$\delta_3=\min\limits_{S=Q_I}\left\{\frac{1}{2}z\right\}$。若$Q_I=\varnothing$令$\delta_3=+\infty$，其中$Q_I=\{s\mid s$是$J_n$的某个伪内点所包含的$G$的顶点集合$\}$。记$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$。若$\delta=+\infty$结束，$G$无完美对集。否则，若$\delta\neq 0$转step5.1若$\delta=0$（此时必有$\delta=\delta_3$）转step5.2。

step5.1 对J_n的每个实外点或含在J_n的伪外点中的G的每个顶点$y:=y-\delta$；对J_n的每个实内点或含在J_n的伪内点中的G的每个顶点，令$y:=y+\delta$，对G中其他的顶点y不变。令$Q_0=\{s\mid s$是J_n的某个伪外点所包含的G的顶点集合$\}$。若$S\in Q_0$令$z:=z+2\delta$；若$S\in Q_I$，令$z:=z-2\delta$；对其他的$S\in Q$，z不变。所得之图仍叫G_n。转回stop2。

step5.2 展开 J_n 中所有使 $z=0$ 的 S 所对应的伪内点，即展开其最外层花。展开后的图仍叫 G_{n-1}。取展开的最外层花的最大对集使与 M_n 一起构成 G_{n-1} 的对集。令 $n:=n-1$ 转 step2。

step6(展开)。相继完全展开 G_n 中所有的伪顶点。若 u^{i+1} 是 G_{i+1} 的伪顶点，选 B_i 的最大对集使其与 M_{i+1} 合起来是 G_i 的对集。最后得图 G 和对集 M，结束。M 是 G 的最大权完美对集。

4. 算法的证明

算法中树的生长，增广，收缩及展开步骤的合理性在[2]中皆有证明，此处略去。类似于[3]中分析可知算法是有效的。故我们只需要证明以下三点：

定理1. 若 G_n 只有一个暴露顶点，则 G 无完美对集。

定理2. 若在算法的step5中 $\delta=+\infty$，则 G 无完美对集。

定理3. 若算法在 step6 结束，则 M 是 G 的最大权完美对集。

为了证明上述三个定理先证明一个引理。

引理1. 设 $G_0=G$，当 $n>0$ 时 G_n 是从 G_{n-1} 通过收缩一个奇多边形 B_{n-1} 所得到的图 G_n 有完美对集当且仅当 G 有完美对集。

证明　设 G_n 有完美对集，我们对 n 用归纳法证明 G 有完美对集。$n=0$ 显然结论正确。若 $n=k-1$ 时结论正确，我们证明 $n=k>0$ 时结论亦真。若 G_k 有完美对集 M_k，G_{k-1} 是展开 G_k 中的伪点 u^k 为 B_{k-1} 所得的图，则显然 M_k 是 G_{k-1} 的对集。设 v^{k-1} 是 B_{k-1} 中与 $e^{k-1}\in M_k$ 关联的顶点，设 M_B 是 B_{k-1} 的最大对集使 v^{k-1} 是暴露顶点，显然 $M_k\cup M_B$ 是 G_{k-1} 的完美对集。由归纳法假定 G 有完美对集。由归纳法知结论为真。

反之，若 G 有完美对集，我们来证明 G_n 有完美对集。$n=0$ 显然结论成立。若 $n=k-1$ 时结论成立，我们证明 $n=k>0$ 时结论亦成立。若 G 有完美对集，由归纳法假定知 G_{k-1} 有完美对集，设它为 M_{k-1}。G_k 是通过收缩 G_{k-1} 的奇多边形 B_{k-1} 所得，显然必有 B_{k-1} 的顶点 v_1^{k-1} 使 $v_1^{k-1}v_2^{k-1}=e^{k-1}\in M_{k-1}$ 且 $v_2^{k-1}\notin B_{k-1}$，令 $M_k=M_{k-1}\cap E(G_k)$，e^k 是 e^{k-1} 在 G_k 中的象，u^k 是收缩 B_{k-1} 所得的 G_k 的顶点，显然 $e^k\in M_k$，e^k 与 u^k 关联。G_k 中的其他顶点显然不可能是 M_k 的暴露点，即 G_k 有完美对集 M_k。由归纳法知引理成立。

定理1的证明　若 G_n 只有一个暴露顶点，显然 G_n 无完美对集，由引理 1 知 G 无完美对集。

引理2　设 J 是 G 的一个匈牙利树，当且仅当 M_1 与 J 的任意最大对集 M_J 一起是 G 的最大集时，$G-J$ 的对集 M_1 在 $G-J$ 中是最大对集。

其证明见[2]。

定理2的证明　在算法的step5中若 $\delta=+\infty$ 则必有 $E_n^1=\varnothing$，$E_n^2=\varnothing$，$Q_j=\varnothing$，即 J_n 不但是 G_n' 的匈牙利树而且也是 G_n 的匈牙利树。J_n 有奇数个顶点[2]，故不可能有完美对集。由引理 2 知 G_n 的最大对集不可能是完美对集。由引理1知 G 无完美对集。

定理3的证明　由算法知 M_n 的完美对集时进行step6，由定理1知展开后的 M 是 G 的完美对集。下面证明 M 是 G 的最大权完美对集。由算法知开始取 $M=\varnothing$，$z=0$ 对 $\forall S\in Q$，$y=\frac{1}{2}\max_{e\in E(G)}\{c\}$ 对 $\forall v\in V(G)$。显然 M，$\langle y,z\rangle$ 满足〈4〉—〈7〉。在整个算法中只有进行

step5时改变$\langle y, z\rangle$由δ的定义及y，z的改变法则，易见$\langle y, z\rangle$改变后仍满足〈4〉、〈5〉及〈7〉，由G'_n的定义及种上的树仅在G'_n内生长可知〈6〉始终成立．就是当M是完美对集时，M及$\langle y, z\rangle$满足定理1的条件，故M是G的最大权完美对集．

5．几点说明

1°我们定义图G的最大权、最大基数对集是G的权和最大的一个最大基数对集．在算法的step5中，把“当$\delta = +\infty$结束”改为“当$\delta = +\infty$令$G := G_n - J_n$转step1”且将step1改为“若G_n至多有一个暴露顶点转step6，否则转step2”．将step6改为“相连完全展开G_n及对应于step5中$\delta = +\infty$的所有J_k的伪顶点结束”．于是展开后得图G和对集M，M便是G的最大权最大基数对集．这里我们略去展开的详细步骤及结论的证明．

2°在求一个图的最大权对集时，不妨假定图G的边权全为非负数．令G'是由G加若干条边权为0的边所得的完备图，对G'施行1°中的算法，则要求出G'的最大权最大基数对集与G的边集的交是G的最大权对集．

参 考 文 献

[1] Cunningham W. H. and Marsh A.B., III. A primal algorithm for optimum matching. Mathematical Programming study,8 (1978).

[2] Edmonds, J., Paths, trees, and Howers, *Canadian Journal of Mathematics*, 17(1965).

[3] Edmands, J., Maximum matching and a polyhedron with(0,1)vertices, *Journal of Research of the National Bureau of standards*, 69B(1965).

[4] Dantzig, G., Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton N. J.(1963).

A Dual Algorithm for Optimum Matching

Lin Guizhen

(Institue of Mashematics shandong University)

Abstract

An algorithm for finding a maximum weight perfect matching in a graph is described. It may be used for finding a maximum weight matching and a matching of maximum cardinality with maximum weight in a graph.