第5卷 第4期
1985年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.4
Oct. 1985

论离散Newton—Hald方法的收敛性*

孙德宝

(黑龙江大学数学系)

考虑非线性方程组

$$F(x)=0 \tag{1}$$

其中，$F(x)=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x))^T$，$x=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$解此方程组的重要方法之一是牛顿法：

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}) \tag{2}$$

它在迭代的每一步需要解一个线性方程组，再者对有些问题，例如非线性差分方程或非线性有限元方程问题中，相应的Jacobi $F'(x)$的计算甚繁，因此在上述两个方向上修改牛顿法总是有实际意义的。Moser(1973)对方程式情形考虑了迭代程序：

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-H_kF(x^{(k)}),\ H_{k+1}=H_k-H_k[F'(x^{(k)})H_k-I]. \tag{3}$$

此程序避免了$F'(x^{(k)})^{-1}$的计算，但其收敛阶较牛顿法低。Hald(1975)修改了上述程序，对方程式情形证明了其程序

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-H_kF(x^{(k)}),\ H_{k+1}=H_k-H_k[F'(x^{(k+1)})H_k-I] \tag{4}$$

与牛顿法具有同样敛速。

注意到$F'(x^{(k+1)})$计算的复杂性，本文考虑迭代程序：

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-H_kF(x^{(k)}),\ H_{k+1}=H_k-H_k[J(x^{(k+1)},\ h^{(k+1)})H_k-I], \tag{5}$$

其中

$$J(x,h)=\begin{pmatrix} \frac{1}{h_1}\left[f_1(x+h_1e_1)-f_1(x)\right]\cdots\cdots\frac{1}{h_n}\left[f_1(x+h_ne_n)-f_1(x)\right] \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \frac{1}{h_1}\left[f_n(x+h_1e_1)-f_n(x)\right]\cdots\cdots\frac{1}{h_n}\left[f_n(x+h_ne_n)-f_n(x)\right]\end{pmatrix},$$

e_i是第i个分量为1其它分量为0的单位向量。证明了当h充分小时程序的收敛性，特别当取

$$\|h^{(k)}\|\leqslant\|F(x^{(k)})\| \tag{6}$$

时，(5)将与牛顿法有同样的收敛速度，收敛阶为2；当取

$$\|h^{(k)}\|\leqslant\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| \tag{7}$$

*1982年12月24日收到。

时，将与弦法有同样的敛速，即收敛阶为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 我们将(5)—(6)及(5)—(7)分别称为Hald-Steffensen方法及Hald型割线法.

定理1 设$F:\Omega\subset R^n\longrightarrow R^n$，于开集$\Omega_0\subset\Omega$上(1)有解$x^*$存在，$F$于$\Omega_0$上有连续的Gateaux微商，且$F'(x^*)^{-1}$存在，则有$\delta$，$\rho$及$\eta$使得对每一个$x^{(0)}\in S(x^*,\ \delta)\subset\Omega_0$，$\|h^{(k)}\|\leqslant\rho$，$\|H_0J_0-I\|\leqslant\eta$，程序(5)有意义且收敛于$x^*$.

证明概述如下：不失一般性的将x的范数取为$\|x\|=\|x\|_1=\sum_{j=1}^{n}|x_i|$，由连续性与Ntwton—Leibniz 公式可得到$\|J(x,h)-F'(x^*)\|<\varepsilon$ 对任何$x\in S$，$\|h\|\leqslant\rho\leqslant\delta$成立.

今设$\|F(x^*)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{a}$($a$—常数)，若取$\varepsilon<\frac{a}{2^4}$，则由Banach逆算子定理有$\|J(x,h)^{-1}\|\leqslant\frac{16}{15a}$. 于是由迭代程序(5)及恒等式$H_{k+1}J_{k+1}-I=-(H_kJ_{k+1}-I)^2$可导出

$$\|H_{k+1}J_{k+1}-I\|\leqslant\left[\frac{11}{10}\|H_kJ_k-I\|+\frac{1}{10}\right]^2, \tag{8}$$

$$\|x^{(k+1)}-x^*\|\leqslant\left[\frac{16}{15}\|H_kJ_k-I\|+\frac{1}{15}\right]\|x^{(k)}-x^*\|. \tag{9}$$

这两个结果是在$x^{(k)}\in S$，$\|h^{(k)}\|\leqslant\rho$的假定之下得到的，因可以有$x^{(0)}\in S$，$\|h^{(0)}\|\leqslant\rho$，从而(8)，(9)对$k=0$成立. 今选H_0，J_0使$\|H_0J_0-I\|\leqslant\eta<\frac{1}{11}$，于是$\|x^{(1)}-x^*\|\leqslant\frac{2}{11}\|x^{(0)}-x^*\|$，故$x^{(1)}\in S(x^*,\delta)$. 利用(8)在$k=0$的情形得到$\|H_1J_1-I\|\leqslant\frac{1}{5^2}<\eta<\frac{1}{11}$. 利用数学归纳法易得出对任何$k=0,1,2,\cdots$，$x^{(k)}\in S$，(8)，(9)成立，且

$$\|H_{k+1}J_{k+1}-I\|\leqslant\frac{1}{11} \tag{10}$$

由(9)(10)有$\|x^{(k+1)}-x^*\|\leqslant\frac{2}{11}\|x^{(k)}-x^*\|$. 反复利用此式得出$\|x^{(k)}-x^*\|\leqslant\left(\frac{2}{11}\right)^k\|x^{(0)}-x^*\|$. 收敛性得证.

定理2 (Hald割线法)设F：$\Omega\subset R^n\longrightarrow R^n$，于开集$\Omega_0\subset\Omega$(1)式有解$x^*$存在，$F$于$\Omega_0$有连续的$G$-微商，$F'(x^*)$存在且$F'(x)$满足Lipschitz条件

$$\|F'(x)-F'(y)\|\leqslant L\|x-y\|,\quad\forall x,y\in\Omega_0,$$

则存在δ，η使当$S(x^*,2\delta)\subset\Omega_0$，对任何$x^{(0)}$，$x^{(1)}\in S(x^*,\delta)$，$\|J(x^{(1)},h^{(1)})H_1-I\|\leqslant\eta$时，迭代程序(5)在$\|h^{(k)}\|\leqslant\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$的情况下收敛于$x^*$，并有估计式$\|x^{(k)}-x^*\|\leqslant c_1\cdot\rho^{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}$其中，$c_1$为常数，$0<\rho<1$.

定理3 (Hald—Steffensen) 若F满足定理2的条件，则存在δ,η,ρ，使对任何$\|x^{(0)}-x^*\|\leqslant\delta$，$\|F(x^{(0)})\|\leqslant\rho$，$\|J(x^{(0)},h^{(0)})H_0-I\|\leqslant\eta$时，迭代程序(5)在$\|h^{(k)}\|\leqslant\|F(x^{(k)})\|$的情形收敛于$x^*$且有估计式$\|x^{(k)}-x^*\|\leqslant c_2q^{2^k}$，$c_2$是常数，$0<q<1$.

参考文献

[1] Hald, O. H., On a Neaton-Moser Type Method, *Numer. Math.* 23 1975, 411—426.

[2] Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., Lterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, 1970 (有中译本).