第5卷 第4期
1985年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.4
Oct. 1985

纠正一点错误*

周友成

(浙江大学)

"Amer Math Monthly" Vol 90 (1983) No. 10(p693-p697)上 Denis Higgs 的文章《Iterating the derived set function》研究了求导算子任意次迭加的一些性质。但此文在主要定理的证明中存在一个错误，而定理本身是正确的，我们在此提出纠正，供参考。

为了方便先复述一下主要的定义及有关命题。

$d(A)$ 记为拓扑空间S中子集A的导集，即A在S中所有极限点的集合。$\mathscr{P}(s)$ 记为S的幂集。对S上某一拓扑的导集函数 $d:\mathscr{P}(s)\to\mathscr{P}(s)$ 称为S上的导集函数。

命题1 函数 $d:\mathscr{P}(s)\to\mathscr{P}(s)$ 是S上的一个导集函数当且仅当：

(i) $d(\varnothing)=\varnothing$且对所有的$A$、$B\in\mathscr{P}(s)$，$d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$；

(ii) $x\notin d(x)$，$\forall x\in S$；

(iii) 对所有的$A\in\mathscr{P}(s)$，$d^2(A)\subseteq A\cup d(A)$。

($d(x)=d(\{x\})$，$d^2(A)=d(d(A))$)

S上一个导集函数d的α次迭加$d^\alpha:\mathscr{P}(s)\to\mathscr{P}(s)$ 按α上的超穷递归式定义如下

$$d'(A)=d(A)\qquad d^{\alpha+1}(A)=d(d^\alpha(A))$$

$$d^\lambda(A)=\bigcap_{\alpha<\lambda}d^\alpha(A)$$

这里A是$\mathscr{P}(s)$的任意元，α记非零序数，λ记极限序数。

定理： 设d为集S上的一个T_D导集函数（注：原文中没有T_D的条件，估计是疏漏，T_D是介于T_0与T_1之间的分离公理——对于任何$A\in\mathscr{P}(s)$，$d(A)$是闭集），那么对所有的非零序数α，d^α是S上的一个T_D导集函数。而且对$\alpha\leqslant\beta$，$d^\beta\leqslant d^\alpha$成立和对所有$\alpha,\beta$，$d^{\alpha+\beta}=d^\beta\cdot d^\alpha$ 和 $d^{\alpha\beta}=(d^\alpha)^\beta$ 成立。

原文作者是用超穷归纳法证明这个定理的。首先证明了$d^\beta\leqslant d^\alpha$（即$d^\beta(A)\subseteq d^\alpha(A)$）对$\alpha\leqslant\beta$成立。

接着证明d^α满足命题1中(i)，记为$\mathscr{O}(\alpha)$。在证明对极限序数λ，$\mathscr{O}(\lambda)$成立中发生了错误（初看时觉得可能是笔误或印刷错误，但仔细看一下并非如此）。为了便于对照，把原文中这一小段抄录如下：

*1984年9月5日收到。

$\mathcal{O}(1)$ is certainly true and $\mathcal{O}(\alpha)$ clearly implies $\mathcal{O}(\alpha+1)$. Suppose $\mathcal{O}(\alpha)$ holds for all $\alpha<\lambda$. Then $\mathcal{O}(\lambda)$ states that

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(A)\cap d^{\alpha}(B)=\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(A)\cap\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(B)$$

and it is clear that the left-hand side is contained in the right. To show that the other containment also holds, let x be in the right-hand side, so that $x\in d^{\alpha}(A)\cap d^{\beta}(B)$ for some α, $\beta<\lambda$ where $\alpha\leqslant\beta$, say. Then $x\in d^{\beta}(A)\cap d^{\beta}(B)$ and hence x is in the left-hand side. So $\mathcal{O}(\lambda)$ holds, and we therefore have $\mathcal{O}(\alpha)$ for all α, that is, d^{α} satisfies condition (i) for all α.

$\mathcal{O}(\lambda)$ 显然应指

$\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(A\cup B)=\bigcap_{\alpha<\lambda}[d^{\alpha}(A)\cup d^{\alpha}(B)]=\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(A)\cup\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(B)$ 但若在原文中把$\cap$改为$\cup$，其证明也是错误的（即使按文章中错误的写法的证明还是错的）我们给出证明如下：

$\bigcap_{\alpha<\lambda}[d^{\alpha}(A)\cup d^{\alpha}(B)]\supseteq\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(A)\cup\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(B)$ 是显然的，证明相反的包含关系。

若$x\in\bigcap_{\alpha<\lambda}[d^{\alpha}(A)\cup d^{\alpha}(B)]$，则$\forall\alpha<\lambda$，$x\in d^{\alpha}(A)\cup d^{\alpha}(B)$，即$x\in d^{\alpha}(A)$ 或 $x\in d^{\alpha}(B)$。那么成立如下事实：$\forall\beta<\lambda$，$\exists\gamma<\lambda$ 且 $\beta<\gamma$ 使得 $x\in d^{\gamma}(A)$ 或 $\forall\beta<\lambda$，$\exists\gamma<\lambda$ 且 $\beta<\gamma$ 使 $x\in d^{\gamma}(B)$。因为若前者不成立，即$\exists\beta_0<\lambda$使对满足$\beta_0<\gamma<\lambda$的任意序数γ，$x\notin d^{\gamma}(A)$，则$x\in d^{\gamma}(B)$。这明显地蕴含后者。如果对$\beta<\gamma<\lambda$，$x\in d^{\gamma}(A)$ 成立，

则由$d^{\beta}\leqslant d^{\alpha}$对$\alpha\leqslant\beta$成立（定理中已证）$\forall\alpha<\lambda$，$x\in d^{\alpha}(A)$，即有$x\in\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(A)$。

从而$x\in\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(A)\cup\bigcap_{\alpha<\lambda} d^{\alpha}(B)$，若后者成立也同样得到此关系。

这样$\mathcal{O}(\lambda)$ 对任何极限序数λ成立。

参 考 文 献

[1] Kuratowski, K. & Mostowski, A., Set Theory North-Holland, Publ Co., 1976.
[2] Dugundji Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.