关于一些弱于仿紧性质在连续闭映射下的逆象（Ⅰ）*

王 燕 敏

（上海师范学院）

§0 引　言

在如何减弱性质（P）使“性质（P）＋列紧→紧”的研究中，许多数学家如G. Aguaro, J.M.Worrell, 和H.H.Wicke等人一再减弱了性质（P）的条件，从而先后引入了一些弱于仿紧的空间性质。由〔2〕,〔5〕等文，这些空间性质有如下蕴含关系：

$$
\begin{tikzcd}
\text{仿紧} \arrow[r] \arrow[dd] & \text{紧式仿紧〔6〕} \arrow[r] \arrow[d] & \text{CS式仿紧〔6〕} \arrow[r] \arrow[d] & \text{亚紧} \arrow[r] \arrow[d] & \theta\text{加细〔1〕} \arrow[r] \arrow[dd] & \text{弱}\theta\text{加细〔2〕} \arrow[dd] \\
 & \sigma\text{-紧式仿紧} \arrow[r] \arrow[d] & \sigma\text{-CS式仿紧} \arrow[r] \arrow[d] & \sigma\text{亚紧} \arrow[urr] \arrow[d] & & \\
\text{仿Lindelof} \arrow[r] & \text{紧式Lindelof} \arrow[r] & \text{CS式Lindelof} \arrow[r] & \text{亚Lindelof} \arrow[r] & \delta\theta\text{加细〔2〕} \arrow[r] & \text{弱}\delta\theta\text{加细〔2〕}
\end{tikzcd}
$$

（表一）

关于这些空间性质在完备映射下的逆象问题，在Burke 1980年的汇编〔4〕中指出业已解决了仿紧、紧式仿紧、亚紧、θ加细、弱θ加细、仿Lindelöf、δθ加细，Burke〔4〕还明确指出其中大部分空间映射条件可减弱为$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是*Lindelöf*的连续闭映射，但究竟能减弱到什么条件似乎至今还不清楚。本文以统一形式的结果解决了这个问题并给出了统一的充要条件，加强了〔4〕中的结果。

§Ⅰ. 准备知识和术语：

为下文讨论方便，先给出在本文中所使用的术语如下：

（1）如果拓扑空间X的任一开复盖$\mathscr{U}$，存在具有集族性质（P）[1]的开集族 加细$\mathscr{U}$，且$\mathscr{V}$覆盖X，就说X具有性质（P）。

（2）设M是拓扑空间X的子集，如果对于M的每个由X中的开集组成的复盖$\mathscr{U}$，都存在X中的开集族$\mathscr{V}$相对于$\mathscr{V}^{*}$[2]具有集族性质（P），使$\mathscr{V}$加细$\mathscr{U}$且覆盖M，就说M具有性质$a-(P)$。

（3）具有集族性质（P）的集族$\mathscr{U}$称为具有遗传性集族性质（P）的，如果对每个$U\in\mathscr{U}$，任取$V_U\subset U$，$\mathscr{V}=\{V_U|U\in\mathscr{U}\}$相对于$\mathscr{V}^{*}$也具有集族性质（P），这时也说集族性质（P）是可遗传的。

---

* 1984年 1 月 4 日收到。

1. 集族性质是指集族所具有的性质，如局部有限、按点有限等，本文作为一个专用名词使用。

2. 对于X的子集族$\mathscr{U}$，以$\mathscr{U}^{*}$表示$\cup\{U|U\in\mathscr{U}\}$。又对于$\forall x\in\mathscr{U}^{*}$，$\mathscr{U}$在$x$处满足集族性质(P)，称$\mathscr{U}$为相对于$\mathscr{U}^{*}$具有集族性质（P）。

将所研究的拓扑空间的定义简述如下：

集族性质（P）	拓扑空间X	集族性质（P）	拓扑空间X
局部有限	仿　　紧	局部可数	仿*Lindelöf*
按点有限	亚　　紧	按点可数	亚*Lindelöf*
紧 有 限	紧式仿紧〔6〕	紧 可 数	紧式*Lindelöf*
CS有限	*CS*式仿紧〔6〕	*CS*可 数	*CS*式*Lindelöf*
弱θ序列	弱θ加细〔2〕	弱$\delta\theta$序列	弱$\delta\theta$加细〔2〕
θ序　列	θ加细〔1〕	$\delta\theta$序　列	$\delta\theta$加细〔2〕
σ-按点有限	σ亚紧		
σ-紧有限	σ-紧式仿紧		
σ-*CS*有限	σ-*CS*式仿紧		

（表二）

类似于紧式（CS式）仿紧按通常方式可定义σ-紧式（σ－CS式）仿紧及紧式（CS式）*Lindelöf*。

注1°（表二）中的空间类之间的蕴含关系如（表一）所述。

2°显然对子集M，M有*Lindelöf*性质→M是a-σ-紧式仿紧子集；且紧→a-紧，*Lindelöf*→a—*Lindelöf*。

§ **2．主要定理**

1°统一形式的结果：

条件（Ⅰ）如果$\mathscr{V}$是Y的具有集族性质（P）的开集族，$f:X\to Y$是连续闭映射，则$f^{-1}(\mathscr{V})\overset{\text{记}}{=}\{f^{-1}(V)|V\in\mathscr{V}\}$是X的具有集族性质（$P$）的开集族。

条件（Ⅱ）如果$\mathscr{W}=\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{W}_a$，对$\forall a\in A$，开集族$\mathscr{W}_a$相对于$\mathscr{W}_a^*$具有集族性质（P），且$\{\mathscr{W}_a^*|a\in A\}$也具有集族性质（$P$），则$\mathscr{W}$具有集族性质（P）。

基本定理Ⅰ．设f是拓扑空间X到具有性质（P）的拓扑空间Y上的连续闭映射，且$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的具有性质a－（P）的子集，集族性质（P）可遗传[1)]并且满足上述条件（Ⅰ）、（Ⅱ）、则X也具有性质（P）。

对T_1空间，基本定理Ⅰ可写成充要条件：

基本定理Ⅰ′．设可遗传的集族性质（P）满足条件（Ⅰ）、（Ⅱ），则对T_1空间Y，性质（P）在连续闭映射f下的逆象保持性质的充要条件是$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$具有性质a－(P)。

对于不适用于基本定理Ⅰ的集族性质，有如下一般的结论：

条件（Ⅱ′）如果$\mathscr{W}=\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{W}_a$，对$\forall a\in A$，开集族$\mathscr{W}_a$相对于$\mathscr{W}_a^*$具有集族性质（$Q$）(集族性质（$Q$）强于集族性质（P）)，且$\{\mathscr{W}_a^*|a\in A\}$具有集族性质（P），则$\mathscr{W}$具有集族性质（P）。

基本定理Ⅱ．设f是拓扑空间X到具有性质（P）拓扑空间Y上的连续闭映射，且$\forall y$

1）注意：这里以及下面的“可遗传”是指集族性质的可遗传性，而非空间性质所指。

$\in Y$, $f^{-1}(y)$是X的具有性质a-(Q)的子集，其中性质（Q）强于性质（P），且集族性质（Q）可遗传，满足上述条件（Ⅰ）、(Ⅱ′)，则X也具有性质（P）。

对于基本定理Ⅱ自然要求具体的性质（Q）尽可能地弱!

2° 关于具体空间的定理：

利用基本定理Ⅰ，本文有如下主要结果：

定理1．设f是拓扑空间X到紧式（CS式）仿紧〔紧式（CS式）*Lindelöf*〕空间Y上的连续闭映射，且$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的a－紧式（a－CS式）仿紧〔a－紧式（a－CS式）*Lindelöf*〕子集。则X是紧式（CS式）仿紧〔紧式（CS式）*Lindlöf*〕空间。

定理2．设f是拓扑空间X到σ－紧式（σ－CS式）仿紧空间Y上的连续闭映射，且$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的$a-\sigma$－紧式（$a-\sigma$－CS式）仿紧子集。则X是σ－紧式（σ－CS式）仿紧空间。

定理3．设f是拓扑空间X到σ亚紧〔亚*Lindelöf*〕空间Y上的连续闭映射，且$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的$a-\sigma$亚紧〔a－亚*Lindelöf*〕子集，则X是σ亚紧〔亚*Lindelöf*〕空间。

利用基本定理Ⅱ，本文有如下主要结果：

定理4．设f是拓扑空间X到θ加细〔弱θ加细〕空间Y上的连续闭映射，且$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的a－亚紧〔$a-\sigma$亚紧〕子集，则X是θ加细〔弱θ加细〕空间。

定理5．设f是拓扑空间X到$\delta\theta$加细〔弱$\delta\theta$加细〕空间Y上的连续闭映射，且$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的a－亚*Lindelöf*子集。则Z是$\delta\theta$加细〔弱$\delta\theta$加细〕空间。

§3．定理的证明

1° 统一形式结论的证明：

基本定理Ⅰ的证明：设$\mathscr{U}$是X的任一开复盖，$\forall y\in Y$，$\mathscr{U}$是$f^{-1}(y)$的由X的开集组成的复盖，由于$f^{-1}(y)$具有性质a－(P)，故存在X中的开集族$\mathscr{U}'(y)$相对于$(\mathscr{U}'(y))^*$具有集族性质（P），使$\mathscr{U}'(y)$加细$\mathscr{U}$且覆盖$f^{-1}(y)$，从而有$f^{-1}(y)\subset U(y)\overset{记}{=}\bigcup\{U'|U'\in\mathscr{U}'(y)\}$，则$U(y)$是X中的开集，令

$$G(y)=Y-f(X-U(y))$$

则$f^{-1}(G(y))\subset U(y)$，由于f是闭映射，故知$G(y)$是Y中的开集，且由于$f^{-1}(y)\subset U(y)$，即知$y\in G(y)$，亦即$\mathscr{G}=\{G(y)|y\in Y\}$是Y的开复盖，由于Y具有性质（P），即存在具有集族性质（P）的开集族 加细$\mathscr{G}$且覆盖Y。

对每个$V\in\mathscr{V}$，选取$y(V)\in Y$使$V\subset G(y(V))$，所以$f^{-1}(V)\subset f^{-1}(G(y(V)))\subset U(y(V))$，且令

$$\mathscr{W}=\{f^{-1}(V)\cap U'|U'\in\mathscr{U}'(y(V)),\quad V\in\mathscr{V}\}$$

由于f连续，故$\mathscr{W}$是X的开集族且加细$\mathscr{U}$，下证$\mathscr{W}$覆盖X，且具有集族性质（P）：

i）$\forall x\in X$，即$f(x)=y\in Y$，由于 覆盖Y，所以$\exists V\in\mathscr{V}$，使$y\in V$，故$f^{-1}(y)\subset f^{-1}(V)$，而$f^{-1}(V)\subset U(y(V))=\bigcup\{U'|U'\in\mathscr{U}'(y(V))\}$，故而必有$U'\in\mathscr{U}'(y(V))$，使$x\in U'$，故$x\in f^{-1}(V)\cap U'\in\mathscr{W}$，因而$\mathscr{W}$覆盖X。

ii）对于每个$V\in$ ，令

$$\mathscr{W}(V)=\{f^{-1}(V)\cap U'|U'\in\mathscr{U}'(y(V))\}$$

则 $\mathscr{W}=\bigcup_{V\in\mathscr{V}}\mathscr{W}(V)$。

由集族性质（P）可遗传性，$\mathscr{U}'(y(V))$相对于$(\mathscr{U}'(y(V)))^*$具有集族性质（P），故$\mathscr{W}(V)$相对于$(\mathscr{W}(V))^*$具有集族性质（P），且因$f^{-1}(V)\subset U(y(V))$，所以$(\mathscr{W}(V))^* = \bigcup\{f^{-1}(V)\cap U' | U'\in\mathscr{U}'(y(V))\} = f^{-1}(V)\cap(\bigcup\{U'|U'\in\mathscr{U}'(y(V))\}) = f^{-1}(V)\cap U(y(V)) = f^{-1}(V)$。由条件（Ⅰ）知$\{(\mathscr{W}(V))^* | V\in\mathscr{V}\}$具有集族性质（P），又由条件（Ⅱ）知$\mathscr{W}$具有集族性质（P）。

因此X具有性质（P）。

基本定理Ⅰ′的充分性即为基本定理Ⅰ，其必要性只需注意到$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的闭集，可证$f^{-1}(y)$具有性质$a-(P)$。

基本定理Ⅱ的证明与基本定理Ⅰ相仿，仅需在有关三处稍作改动即可。

2°关于具体空间的定理之证明及其推论：

利用基本定理Ⅰ证明定理1—3及其推论：

定理1的证明：即要证基本定理Ⅰ对性质（P）为紧式（CS式）仿紧〔紧式（CS式）*Lindelöf*〕成立，只要验证条件（Ⅰ）、（Ⅱ）即可（显然集族性质紧有限（CS有限）〔紧可数（CS可数）〕是可遗传的），以下对紧式（CS式）仿紧进行验证，关于紧式（CS式）*Lindelöf*的证明是相仿的。

用$\mathscr{K}_X$和$\mathscr{K}_Y$分别表示空间X和Y中紧子集的全体，用CS_X和CS_Y分别表示空间X和Y中形如$\{p_n, p\}$的子集的全体，其中$p_n\to p$当$n\to\infty$时，若$\mathscr{U}$为一集族，B为一子集，记$(\mathscr{U})_B=\{U\in\mathscr{U} | U\cap B\neq\phi\}$。

条件（Ⅰ）设$\mathscr{V}=\{V_a\}_{a\in A}$是Y的紧有限（CS有限）开集族，记$f^{-1}(\mathscr{V})=\{f^{-1}(V_a)\}_{a\in A}$。

对每个$k\in\mathscr{K}_X (k\in CS)$，因$f$连续闭，故$f(k)\in\mathscr{K}_Y$（$f(k)\in CS_Y$[3]），因而$(\mathscr{V})_{f(k)}=\{V_a\in\mathscr{V} | V_a\cap f(k)\neq\phi\}$有限。设$(\mathscr{V})_{f(k)}=\{V_{a_i}\}_{i=1}^n$。则$\forall V_a\in\mathscr{V}\setminus(\mathscr{V})_{f(k)}$，$V_a\cap f(k)=\phi$，所以$f^{-1}(V_a)\cap k\subset f^{-1}(V_a)\cap f^{-1}(f(k)) = f^{-1}(V_a\cap f(k))=\phi$，$\forall a\in A\setminus\{a_i\}_{i=1}^n$成立，从而$k$至多与$f^{-1}(\mathscr{V})$的有限多个元素相交，即$(\mathscr{V})_{f(k)}=\{f^{-1}(V_a) | V_a\in, f^{-1}(V_a)\cap k\neq\phi\}$有限，因此$f^{-1}(\mathscr{V})$是紧有限（CS有限）的开集族。

条件（Ⅱ）设$\mathscr{W}=\bigcup_{a\in A}\mathscr{W}_a$，$\forall a\in A$，$\mathscr{W}_a$是相对于$\mathscr{W}_a^*$紧有限（CS有限）的开集族，且$\{\mathscr{W}_a^* | a\in A\}$是紧有限（CS有限）开集族。

对每个$k\in\mathscr{K}(k\in CS)$，由于$\{\mathscr{W}_a^* | a\in A\}$紧有限（CS有限），故$(\{\mathscr{W}_a^*\}_{a\in A})_K=\{\mathscr{W}_a^* | \mathscr{W}_a^*\cap k\neq\phi, a\in A\}$有限，设$(\{\mathscr{W}_a^*\}_{a\in A})_K=\{\mathscr{W}_{a_i}^*\}_{i=1}^n$，故$\mathscr{W}_{a_i}^*\cap k\neq\phi(1\leqslant i\leqslant n)$，且$\forall a\in A\setminus\{a_i\}_{i=1}^n$，$\mathscr{W}_a^*\cap k=\phi$，则$\forall W\in\bigcup_{a\in A\setminus\{a_i\}_{i=1}^n}\mathscr{W}_a$，有$W\cap k=\phi$，即$\bigcup_{a\in A\setminus\{a_i\}_{i=1}^n}(\mathscr{W}_a)_K=\phi$。又因$\mathscr{W}_{a_i}$相对于$\mathscr{W}_{a_i}^*$紧有限（CS有限）$(1\leqslant i\leqslant n)$，故$(\mathscr{W}_{a_i})_K=\{W\in\mathscr{W}_{a_i} | W\cap k\neq\phi\}$有限，因而$(\mathscr{W})_K=\bigcup_{a\in A}(\mathscr{W}_a)_K=\bigcup_{i=1}^n(\mathscr{W}_{a_i})_K$有限，故$\mathscr{W}$是紧有限（CS有限）的开集族。

由基本定理Ⅰ即知定理1成立。

类似可证定理2与3。

对于仿紧及亚紧空间，可相仿地验证有类似的结论[8]。

从定理1—3可得如下推论：

推论1（关于紧式仿紧性见*Burke*〔4〕）

（1）设f是拓扑空间X到Y上的连续闭映射，且$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$具有*Lindelöf*性

质。则由Y是σ-紧式（σ-CS式）仿紧、紧式（CS式）*Lind*.、σ亚紧或亚*Lind*.空间，可知X也分别是σ-紧式（σ-CS式）仿紧、紧式（CS式）*Lind*.，σ亚紧或亚*Lindelöf*空间。

（2）紧式（CS式、σ-紧式、σ-CS式）仿紧、紧式（CS式）*Lindelöf*、σ亚紧和亚*Lindelöf*、σ亚紧和亚*Lind*.空间在完备映射下逆象保持。

（由§1注2°及（表一）即可得）。

利用基本定理Ⅱ证明定理4—5及其推论：

定理4的证明：即要证基本定理Ⅱ对性质（P）为θ加细〔弱θ加细〕且性质（Q）为亚紧〔σ亚紧〕成立，只要验证条件（Ⅰ）、（Ⅱ′）即可（显然按点有限〔σ-按点有限〕是可遗传的集族性质），以下对θ加细性进行验证，对弱θ加细性可类似验证。

条件（Ⅰ）类似定理1中可验证（从略）。

条件（Ⅱ′）设$\mathscr{W}=\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{W}_a$，$\forall a\in A$，$\mathscr{W}_a$是相对于$\mathscr{W}_a^*$按点有限开集族，且$\{\mathscr{W}_a^*\}_{a\in A}=\bigcup\limits_{m<\omega_0}\{\mathscr{W}_a^*\}_{a\in A_m}$是$\theta$序列，即满足条件：

① $\forall x\in X$，$\exists m(x)<\omega_0$，使$0<\mathrm{ord}\left(x,\{\mathscr{W}_a^*\}_{a\in A_{m(x)}}\right)<\omega_0$

② $\forall m<\omega_0$，$\{\mathscr{W}_a^*\}_{a\in A_m}$覆盖X。

（$A_m\subset A$，且$\bigcup\limits_{m<\omega_0}A_m=A$）。

则$\mathscr{W}=\bigcup\limits_{m<\omega_0}\bigcup\limits_{a\in A_m}\mathscr{W}_a$，下证$\mathscr{W}$是$\theta$序列。

（i）$\forall x\in X$，$\exists m(x)<\omega_0$，使$0<\mathrm{ord}\left(x,\{\mathscr{W}_a^*\}_{a\in A_{m(x)}}\right)$[1)]$<\omega_0$，设$\{\mathscr{W}_a^*|x\in\mathscr{W}_a^*,a\in A_{m(x)}\}=\{\mathscr{W}_{a_i}^*\}_{i=1}^{r_{m(x)}}$（$1\leqslant r_{m(x)}<\omega_0$），则$\forall a\in A_{m(x)}\setminus\{a_i\}_{i=1}^{r_{m(x)}}$，有$x\notin\mathscr{W}_a^*$，故$\forall W\in\bigcup\limits_{a\in A_{m(x)}\setminus\{a_i\}_{i=1}^{r_{m(x)}}}\mathscr{W}_a$，均有$x\notin W$，并且由于$\mathscr{W}_{a_i}$相对于$\mathscr{W}_{a_i}^*$按点有限（$1\leqslant i\leqslant r_{m(x)}$），故$x$至多属于$\mathscr{W}_{a_i}$的有限多个元素（$1\leqslant i\leqslant r_{m(x)}$），即$\mathrm{ord}\left(x,\bigcup\limits_{i=1}^{r_{m(x)}}\mathscr{W}_{a_i}\right)<\omega_0$。又$x\in\mathscr{W}_{a_i}^*$（$1\leqslant i\leqslant r_{m(x)}$），故$\exists W\in\bigcup\limits_{r=1}^{r_{m(x)}}\mathscr{W}_{a_i}\subset\bigcup\limits_{a\in A_{m(x)}}\mathscr{W}_a$，使$x\in W$，故

$$0<\mathrm{ord}(x,\bigcup_{a\in A_{m(x)}}\mathscr{W}_a)=\mathrm{ord}(x,\bigcup_{i=1}^{r_{m(x)}}\mathscr{W}_{a_i})<\omega_0\ 。$$

ii）对$\forall m<\omega_0$，由于$\{\mathscr{W}_a^*\}_{a\in A_m}$覆盖X，即$\bigcup\limits_{a\in A_m}\mathscr{W}_a^*=X$，而$(\bigcup\limits_{a\in A_m}\mathscr{W}_a)^*=\bigcup\limits_{a\in A_m}\mathscr{W}_a^*$，故$\bigcup\limits_{a\in A_m}\mathscr{W}_a^*$覆盖X。

由基本定理Ⅱ知X是θ加细的。

类似可证定理5.

利用定理4—5可得如下推论：

推论2（关于θ(弱θ、$\delta\theta$)加细性见〔4〕)。

（1）设f是X到Y上的连续闭映射，且$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$具*Lind*.性，则由Y是弱

1）$\mathrm{ord}(x,\mathscr{W})=|\{W,\mathscr{W}\ |x\in W\}|$。

θ加细、$\delta\theta$加细或弱$\delta\theta$加细空间，可知X也分别是弱θ加细，$\delta\theta$加细或弱$\delta\theta$加细空间。

（2）θ加细、弱θ加细、$\delta\theta$加细和弱$\delta\theta$加细在完备映射下逆象保持。

（由§1注2°及（表一）即可得）

对于仿Lindelöf空间，可仿定理4验证有类似推论2中的结论（见〔4〕)。

到此已在较大程度上解决了（表一）中各类空间性质在相当弱条件的连续闭映射下逆象保持的问题。

注1．从推论1—2中自然会问θ加细、紧式(CS式)仿紧性在$f^{-1}(y)$具Lind．性的连续闭映射下逆象是否保持？在T_3之下，因T_3+Lind$\to a$-仿紧，定理1与4已作肯定回答，若无分离性，答案否定，见§4例1。

2．定理1—5中“a-”不可去掉，甚至f的要求不能改为$\forall y\in Y$，$f^{-1}(y)$是仿紧的”，见§4例2。

尚存问题，对于性质（P）为仿Lind.、θ(弱θ、$\delta\theta$、弱$\delta\theta$）加细之一，基本定理Ⅰ是否适用？

§4　例

为了下文需要，首先容易证明。

引理1．若M是X的闭散子空间，作商空间X/M，商映射$g:X\to X/M$定义为

$$g(x)=\begin{cases}\{x\} & x\in X\setminus M\\ x_* & x\in M\end{cases}$$

则商空间X/M是仿紧的。

例1．令$X=[0,\infty)$，拓扑　由如下定义的邻域基产生，$\forall a\in X\setminus N$　定义$\{a\}$为开集，$\forall n\in N$，n的邻域基为$\mathscr{B}(n)=\{[0,a)\setminus F\mid a>n$，F是X的有限集$\}$

于是N是X的闭散子空间。由引理1 X/N是仿紧的，从而更是θ加细、亚紧及紧式（CS式）仿紧。

因N闭，故商映射g是连续闭映射，$\forall y$　X /N,$g^{-1}(y)$或为$\{x\}$或为N，均为X的散子空间，且$|N|=\omega_0$，所以$g^{-1}(y)$都是Lindelof的

但X非θ加细，当然非仿紧、非紧式（CS式）仿紧、非亚紧的。

事实上，取X的可数开复盖$\mathscr{U}$，若$\mathscr{U}$的θ序列开加细$\mathscr{V}=\bigcup_{n<\omega_0}\mathscr{V}_n$，不失一般性可设

$$\mathscr{V}_n=\{([0,a_{n/j}]\setminus F_{n/j})\cup B_{n/j}\}_{j<\omega_0}\qquad(n=1,2,\cdots\cdots)$$

其中$F_{n,j}\subset X$为有限集且$B_{n,j}$为孤立点之并，并且可设对$j_1<j_2$有$a_{n,j_1}<a_{n,j_2}$且$a_{n,j}\to\infty$当$j\to\infty$时。

取$x_0\in X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}F_{n,j}(\neq\phi)$，$\forall n<\omega_0$，$\exists j(n)<\omega_0$，使$\forall j>j(n)$，有$a_{n,j}>x_0$，故

$x_0\in((0,a_{a,j})\setminus F_{n,j})\cup B_{n,j}$，所以$\mathrm{ord}(x_0,\mathscr{V}_n)=\omega_0$。此与$\theta$序列定义相矛盾。

例2．（此例为Burke[4]改造过的Bing之例，为本文目的，采用Engelking[3]的描述法)。

令$D(\kappa)$是离散空间，$\kappa>2^{\omega_0}=C$，$\mathscr{F}=\{f\mid f:D(\kappa)\to D\}$　$D=\{0,1\}$是离散空间，

则 $|\mathscr{F}|>2^c$（必要时将$\mathscr{F}$良序化）

$F=\underset{f\in\mathscr{F}}{\triangle}f: D(\kappa)\to\prod_{f\in\mathscr{F}}D_f$是同胚嵌入（$\forall f$，$D_f=D$）记$M=F(D(\kappa))$，重新定义$\prod_{f\in\mathscr{F}}D_f$上的拓扑：

$\mathscr{O}=\{U\cup K \mid U$是原拓扑中的开集，$K\subset(\prod_{f\in\mathscr{F}}D_f/M)\}$

令$X=(\prod_{f\in\mathscr{F}}D_f,\mathscr{O})$，则$X\setminus M$是离散子集，M是X的闭散子空间。可证X是$T_4$的（见〔3〕)。

$\forall x\in F(D(\kappa))$ 有$a\in D(\kappa)$，使$x=\{x_f\}_{f\in\mathscr{F}}=\{f(a)\}_{f\in\mathscr{F}}$，定义$x$的标准邻域$U(x,\mathscr{R})=\{x'\in X \mid x'_f=x_f,\ \forall f\in\mathscr{R}\}$，其中$\mathscr{R}\subset\mathscr{F}$，$|\mathscr{R}|<\chi$。则$\{U(x,\mathscr{R}) \mid \mathscr{R}\subset\mathscr{F}, |\mathscr{R}|<\chi_0\}$为$x$之一邻域基,（对$x\in X\setminus M$也可类似定义，此时只要求$\mathscr{R}\subset\mathscr{F}$)。

引用Burke之引理：

引理（D.K.Burke[4]） 设$\{A_a: \alpha\in\Lambda\}$为一集族，$|\Lambda|>C$，$\forall\alpha\in\Lambda$，$A_a$可数，且$A_a=A'_a\cup A''_a$，$A'_a\cap A''_a=\phi$，则$\exists\Lambda'\subseteq\Lambda$使$|\Lambda'|>C$，且$\forall a$，$\beta\in\Lambda'$，$A'_a\cap A''_\beta=\phi$。

Burke利用引理证明了X非θ加细，本文改造其证明，可证X非弱$\delta\theta$加细。

因为M是X的闭散子空间，$\forall x\in M$，$\exists$X的开集U_x使$U_x\cap M=\{x\}$，令$\mathscr{U}=\{U_x \mid x\in M\}\cup\{(X\setminus M)\}$是X的开复盖，若存在$\mathscr{U}$的弱$\delta\theta$序列开加细$\mathscr{V}=\bigcup_{n<\omega_0}\mathscr{V}_n$，即

$x\in X$，$\exists n(x)<\omega_0$，使$0<\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_{n(x)})\leqslant\omega_0$

不失一般性，可设$\mathscr{V}_n=\{U(x,\mathscr{R}''_x(n)) \mid x\in M$，且$x\in\mathscr{V}^*_n\}\cup\{V_{n,s} \mid \phi\neq V_{n,s}\subset X\setminus M\}$，其中$x\in U(x,\mathscr{R}''_x(n))\subset U_x$，$\mathscr{R}''_x(n)=\mathscr{R}'_x(n)\cup\{f_x\}$ $\mathscr{R}'_x(n)\subset\mathscr{F}$，$|\mathscr{R}'_x(n)|<\chi_0$，$f_x\in\mathscr{F}$满足$f_x(a)=\begin{cases}1 & a=F^{-1}(x)\\ 0 & a\neq F^{-1}(x)\end{cases}$，即有$x_{f_x}=f_x(a)=1\quad(a=F^{-1}(x))$，这样的$\mathscr{V}=\bigcup_{n<\omega_0}\mathscr{V}_n$仍不失为$\mathscr{U}$的弱$\delta\theta$序列开加细。

令$N'=\{n<\omega_0 \mid |\{U(x,\mathscr{R}''_x(n)) \mid x\in M$且$x\in\mathscr{V}^*_n\}|\leqslant\omega_0\}$ 则$N'\neq N$，即$N\setminus N'\neq\phi$，$\forall n\in N'$，$\mathscr{V}_n$可写成$\mathscr{V}_n=\{U(x_i(n),\mathscr{R}''_{x_i}(n))\}_{i\in I_n}\cup\{V_{n,s} \mid \phi\neq V_{n,s}\subset(X\setminus M)\}$，$|I_n|\leqslant\chi_0$，且$\mathscr{R}''_{x_i}(n)\neq\phi$，记$a_{i,n}=F^{-1}(x_i(n))$，$\kappa'=\kappa\setminus\bigcup_{n\in N'}\bigcup_{i\in I_n}a_{i,n}$，则$|\kappa'|>C$，不失一般性可令

$\mathscr{V}'_n=\{U(x_i(n),\mathscr{R}''_{x_i}(n))\}_{i\in I_n}\cup\{U(\bar{x},\mathscr{R}_x(n)) \mid \bar{x}\in X\setminus M$且$\bar{x}\in\mathscr{V}^*_n\setminus\bigcup_{i\in I_n}U(x_i(n),\mathscr{R}''_{x_i}(n))\}$，

$n\in N'$ $\mathscr{V}'_n=\mathscr{V}_n$，$n\in N\setminus N'$

则$\mathscr{V}'=\bigcup_{n<\omega_0}\mathscr{V}'_n$仍不失为$\mathscr{U}$的弱$\delta\theta$序列开加细，其中$\bar{x}\in U(\bar{x},\mathscr{R}_{\bar{x}}(n))\subset\cup\{V_{n,s}\setminus\bigcup_{i\in I_n}U(x_i(n),\mathscr{R}''_{x_i}(n)) \mid \bar{x}\in V_{n,s}\subset(X\setminus M)\}$，$\mathscr{R}_{\bar{x}}(n)=\mathscr{R}_{\bar{x}}(n)\cup\{f_x\}$，$\mathscr{R}_{\bar{x}}(n)\subset\mathscr{F}$，$f_{\bar{x}}\subset\mathscr{F}$，使$\bar{x}_{f_x}=1$且$f_{\bar{x}}\in\bigcup_{a\in\kappa}A'_a$，或$\bar{x}_{f_{\bar{x}}}=0$且$f_{\bar{x}}\in\bigcup_{a\in\kappa'}A'_a$。

$\forall x\in F(D(\kappa'))\subset M$，$\exists a\in D(\kappa')$，使$F(a)=x$，令

$A'_a=\{f\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}'_x(n)) \mid f(a)=1\}$。

$A''_a=\{f\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}''_x(n) \mid f(a)=0\}$

则$A'_a \cap A''_a = \phi$，且$A_a = A'_a \cup A''_a \left(= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}''_x(n)\right)$，$A_a$可数；显然$\forall f_{x_i(n)} (i \in I_m,\ n \in N')\ f_{x_i(n)} \notin A'_a$，因$|\kappa'| > C$，由Burke之引理，$\exists \kappa'' \subset \kappa'$，$|\kappa''| > C$，$\forall a,\ \beta \in \kappa''$，有$A'_a \cap A''_\beta = \phi$，故$\left(\bigcup_{a \in \kappa''} A'_a\right) \cap \left(\bigcup_{a \in \kappa''} A''_a\right) = \phi$。定义$x_* = \{x_{*f}\}_{f \in \mathscr{F}} \in X$，$x_{*f} = 1$若$f \in \bigcup_{a \in \kappa''} A'_a$，$x_{*f} = 0$对其它$f$则$\forall n \in N \setminus N'$，必$\mathrm{ord}((x_*, \mathscr{V}'_n) > \omega_0$。

事实上，$\forall n \in N \setminus N'$，$\forall a \in \kappa''$，$x = F(a)$，都有$x_* \in U(x, \mathscr{R}''_x(n))$因为$\forall f \in \mathscr{R}''_x(n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}''_x(n)$，若$x_f = f(a) = 1$，则$f \in A'_a \subset \bigcup_{a \in \kappa''} A'_a$，故$x_{*f} = 1$；若$x_f = f(a) = 0$，则$f \in A''_a \subset \bigcup_{a \in \kappa''} A''_a$，故$x_{*f} = 0$。故$x_{*f} = f(a) = x_f$，且因$\forall n \in N \setminus N'$，$|\{U(x, \mathscr{R}''_x(n)) \mid x \in M$且$x \in \mathscr{V}^*_n\}| > \omega_0$，故$\mathrm{ord}(x_*, \mathscr{V}'_n) > \omega_0$。

对$\forall n \in N'$，注意到$f_{x_i(n)} \in \mathscr{R}''_{x_i}(n)$，且$f_{\bar{x}} \in \mathscr{R}_{\bar{x}}(n)$，但$f_{x_i(n)} \notin \bigcup_{a \in} A^*_a \supset \bigcup_{a \in \kappa''} A'_a$，及$\bar{x}_{f_{\bar{x}}} = 1$时$f_x \notin \bigcup_{a \in \kappa'} A'_a$或$\bar{x}_{f_{\bar{x}}} = 0$时$f_{\bar{x}} \in \bigcup_{a \in \kappa''} A'_a$，从而即知$\mathrm{ord}(x_*, \mathscr{V}'_n) = 0$。

此与弱$\delta\theta$序列定义相矛盾。

因此X非弱$\delta\theta$加细，从而非（表一）中任一空间性质。而由引理1，X/M是仿紧的，从而更具（表一）中所有空间性质。

因M为闭集，故商映射q是连续闭映射，$\forall y \in X/M$，$q^{-1}_{(y)}$或是单点集或是$M = F(D(\kappa))$，均为X的散子空间，从而$q^{-1}(y)$是仿紧的。

注：本文§1—§3的所有结果均为作者1982年1月在江苏师院（现为苏州大学）时作出。§4的两例得到陕西师范大学孙叔豪的很大帮助，特此感谢！

附注：在F. D. Tall 1982年底成都讲学时引入的国外最新资料 Handbook of Set-theoretic Topology中，D.K. Burke的Covering Properties一文中所汇编的结果（定理5.9, p.57）是：表4.1[*]中所有这些复盖性质在（具有正则定义域）完备映射下逆象保持。其实，这些性质在具有Lindelöf fibers, ie, $\forall y \in Y$，$f^{-1}(y)$具有Lindelöf性，（和正则定义域）的闭映射下逆象保持。

事实上，从其证明中可以看出也要求映射为连续的，而本文并不要求定义域X具有正则性。因而本文加强了D.K. Burke 1982年所汇编的结果。

References

[1] Worrell J. M., Wicke H. H., Characterization of developable topological spaces, Canad. J. Math., 17(1965), 820—830.

[2] Worrell J. M., Wicke H. H, Point-countability and compactness, Proc, Amer. Math. Soc., 55(1976), 427—431.

[3] R. Engelking, General Topology, Polish Scientific Publishers, WARSZAWA 1977.

(*) 作者注：该文之表4.1我们这里不加引录以省篇幅，其中与本文所讨论的空间大部分相同。

〔4〕D. K. Burke, Closed mappings, ed. by G. M. Reed, Surveys in General Topology, (1980), 1—32.
〔5〕J. R. Boone, Some characterizations of paracompactness in k-spaces, Fund. Math. 72(1971), 145—153.
〔6〕V. J. Mancuso, Mesocompactness and related properties, Pacific J. Math. 33(1970), 345—355.
〔7〕D. K. Burke, A note on R. H. Bing's example G, ed. by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich, Topology Conference(1974), 47—52.
〔8〕陈必胜，关于弱仿紧空间的注记，（1981 年成都交流稿）.

On the Preimage of Some Properties Weaker than Paracompactness under Continuous Closed Mapping

Wang Yan-Ming

Absnract

In this paper, we study with uniform results the preimage of which the properties will preserve the same property under the continuous closed mapping whicd possess certain quite weak condition, for σ-metacompctness, θ-refinability, weakly θ-refinability, paralindelöfness, metalindelöfness, δθ-refinability, weakly δθ-refinability, mesocompactness and sequentially mesocompactness, and so on. A necessary and sufficient condition about preimage problem, with uniform results, has been given in this paper; and therefore the results in D. K. Burke's survey paper〔4〕have been strengthened in ihis paper.