6q+1级2—传递置换群，q为素数*

李慧陵 沈 虹

（兰州大学）（西安工业学院）

§1 引 言

M. D. Atkinson在文〔3〕中提出一个猜想：若G是Ω上2—传递而非2—本原置换群，则G是下面四种群之一：

i）素数p级$p(p-1)$阶亚循环群；

ii）对于素数p，是2^p级$2^p(2^p-1)$或$2^p(2^p-1)p$阶群；

iii）是有$\lambda=1$的区组设计的自同构群；

iv）$Sz(q)\leqslant G\leqslant Aut(Sz(q))$

本文证明在G是$n=6q+1$级，q为素数时，猜想成立，我们的结论是

定理 设G是集合Ω上的一个2—传递群，$|\Omega|=6q+1$，q为素数，则下列三种情形之一成立：

i）G是2—本原的；

ii）G是强2—传递的（sharply 2—transitive）；

iii）G是有$\lambda=1$的区组设计的自同构群。

定理的证明在§2内。在证明中我们未用到有限单群完全分类的结论。

在本文中，多数符号的用法与Wielandt〔11〕相同。此外，若G是Ω上的置换群，Δ为Ω的子集，我们用$G_{\{\Delta\}}$表示G中所有把子集Δ还变成Δ的元素所构成的子群。

定理的证明需要下列几个引理。前三个引理的证明可在文〔2〕中找到。

引理1 G是G上2—传递群，$\alpha,\beta\in\Omega$，$\alpha\neq\beta$。且K是$G_{\alpha\beta}$中弱封闭子群，$\Delta=fix(K)$是在K上保持不动的点的集合。则取Δ在G下的象为区组作成的区组设计，有$\lambda=1$。

引理2. G是Ω上2—传递群，$\alpha\in\Omega$，Δ是G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上一个非本原集，且$\beta\in\Delta$，$\Delta-\{\beta\}$在$G_{\{\alpha,\beta\}}$下不变。则以$\Gamma=\Delta\cup\{\alpha\}$在G下的象为区组作成的区组设计有$\lambda=1$。

引理3. G是Ω上2—传递群。$\alpha\in\Omega$，Δ是G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上一个m长的非本原集，$\beta\in\Delta$。则$G_{\{\alpha,\beta\}}$在$\Omega-\{\alpha,\beta\}$上有一个长为（$m-1$）的不变集合Γ，并且当$G_{\alpha,\beta}$在$\Delta-\{\beta\}$上传递时，$G_{\alpha,\beta}$和$G_{\{\alpha,\beta\}}$在Γ上传递。

引理4. G是Ω上传递群，$H<G$，Σ为H在Ω上的一个轨道，则

$$|\Sigma|\cdot|G:H|\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,|\Omega|)$$

证明： 取$\alpha\in\Sigma$，则$|G:H_\alpha|=|G:G_\alpha|\cdot|G_\alpha:H_\alpha|=|G:H|\cdot|H:H_\alpha|$，而$|H:H_\alpha|=|\Sigma|$。

引理5. G是Ω上2—传递而非2—本原群，$\alpha,\beta\in\Omega$，$\alpha\neq\beta$．则G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上的任何一

* 1982年2月12日收到.

个非本原集Δ不能同时又是G_β的非本原集。

证明：设Δ是G_α, G_β的公共的非本原集，且$|\Omega|=n$，$|\Delta|=m$，且恰有s个与Δ共轭的非本原集，则$n-1=ms$．令$M=G_{\{\Delta\}}$，则$M_\alpha=G_{\alpha,\{\Delta\}}$．于是$M_\alpha$为$\Omega-\alpha$上的传递群$G_\alpha$的子群。且$|G_\alpha:G_{\alpha,\{\Delta\}}|=S$，故$G_{\alpha,\{\Delta\}}$在$\Omega-\{\alpha\}$上的每一个轨道的长都是$m$的倍数。而且M的包含$\alpha$的轨道的长为$1+dm$，这里d为一整数。但$M\lneqq G_\alpha$，因之$d\geqslant 1$。这样一来

$$|G:M|\cdot|M:M_\alpha|=|G:M|\cdot(1+dm);$$

但 $|G:M_\alpha|=ns$，故 $|G:M|=\frac{ns}{1+dm}<\frac{ns}{m}$．

另一方面，$\{\Delta^g|g\in G\}$是一个区组设计，它恰有$|G:M|$个不同的区组。若Ω的每个无序二元集恰在λ_1个区组内出现，则$\lambda_1 n(n-1)=|G:M|\cdot m(m-1)$．故又有$|G:M|=\frac{\lambda_1 ns}{m-1}>\frac{ns}{m}$，矛盾。

设G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上的一个完全非本原系是$\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots\cdots,\Delta_s\}$。令K为$G_\alpha$中把每个$\Delta_i$都不变的元素所构成的子群。我们有：

引理6. 若$|G_\alpha/K|=s$，则G中有一个指数为s的正规子群N，N在Ω上传递且$N_\alpha=K$。

证明：显然K是G_α的正规子群。由于$|G_\alpha/K|=s$，且G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上传递，G_α中所有在K外的元素都只有一个不动点α，故若$g\overline{\in}G_\alpha$，$G_\alpha\cap G_\alpha^g\subseteq K$，由Wielandt 定理（〔4〕242页）知有N使

$$N\lhd G,\quad N\cap G_\alpha=K,\quad NG_\alpha=G.$$

于是 $G/N\cong G_\alpha/K$．证完。

除此之外，我们需要D．G．Higman 关于传递群的相交数的概念及其初等性质（见〔6〕)。这些我们简单地叙述如下。

设X是集合Ω上的一个传递群。$\alpha\in\Omega$，我们把X_α在Ω上的轨道数r称为X的秩。显然r与α的选取无关。设$\Delta_0(\alpha)=\{\alpha\}$，$\Delta_1(\alpha)$，…，$\Delta_{r-1}(\alpha)$为$X_\alpha$的轨道。容易看出，我们可将各点的稳定子群的轨道如此编号，使得若$g\in X$，$\alpha^g=\beta$，则$\Delta_i^g(\alpha)=\Delta_i(\beta)$。对$i=0,1,\cdots,r-1$成立。设$l_i=|\Delta_i(\alpha)|$，令

$$\mu_{j,k}^{(i)}=|\Delta_j(\beta)\cap\Delta_i(\alpha)|,\quad \beta\in\Delta_k(\alpha)。\qquad (1)$$

不难看出$\mu_{j,k}^{(i)}$只依赖于i，j，k而与α,β的选取无关。我们称$\mu_{j,k}^{(i)}$，$i,j,k=0,1,\cdots,r-1$，为X的相交数，而把r级矩阵

$$V_i=(\mu_{j,k}^{(i)}),\qquad i=0,1,\cdots,r-1。$$

称为X的相交数矩阵。Higman 证明了，V_0，…，V_{r-1}所生成的矩阵环与X的中心化子环同构（〔6〕,〔11〕)。

由定义（1）容易看出：

$$\mu_{j,k}^{(i)}=\mu_{i,k'}^{(j)};\quad \sum_j\mu_{j,k}^{(i)}=l_i;\quad \sum_i\mu_{j,k}^{(i)}=l_j;\quad \mu_{j,o}^{(i)}=\delta_{ij}l_i;\quad \mu_{o,k}^{(i)}=\delta_{i,k},\qquad (2)$$

这里K'表示X_α的与$\Delta_k(\alpha)$配对的轨道的足标。此外不难证明

$$l_k\mu_{j,k}^{(i)}=l_j\mu_{k,j}^{(i')}.\qquad (3)$$

现在假设G在Ω上2-传递，$\alpha\in\Omega$，G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上有完全非本原系$\{\Delta_1,\cdots,\Delta_s\}$，且$|G_\alpha/K|=s$

则由引理 6 知有N，$N \lhd G$ 且$|G/N|=s$，同时$N_\alpha=K$，于是 N_α的轨道即为$\{\alpha\}$和诸Δ_i，$i=1,2,\cdots,s$.关于N的相交数我们有下面的引理。

引理7. 在上面的假设下，若有$x\in G_\alpha$，使$\Delta_i^\alpha(\alpha)=\Delta_{i+1}(\alpha)$,$i=1,2,\cdots,s$，则$\mu_{j,k}^{(i)}=\mu_{j+1,k+1}^{(i)}$对$i,j,k=1,2,\cdots,s$成立。这里的加法按模 s 的加法进行，特别$s+1$的"值"为1.

证明：根据假设有$x\in G_\alpha$使$\Delta_i^x(\alpha)=\Delta_{i+1}(\alpha)$，而$x\overline{\in}N$．今设$\beta\in\Delta_k(\alpha)$，于是

$$\mu_{j,k}^{(i)}=|\Delta_j(\beta)\cap\Delta_i(\alpha)|=|\Delta_j^x(\beta)\cap\Delta_{i}^x(\alpha)|=|\Delta_j^x(\beta)\cap\Delta_{i+1}(\alpha)| \quad (4)$$

由N的传递性有$n\in N$，使$\alpha^n=\beta$，且$x^{-1}nx=n'\in N$，$nx=xn'$而且$\alpha^{n'}=\alpha^{x^{-1}nx}=\alpha^{nx}=\beta^x$。这样 $\Delta_j^x(\beta)=\Delta_j^x(\alpha^n)=\Delta^{nx}{}_j(\alpha)=\Delta_j^{xn'}(\alpha)=\Delta_{j+1}^{n'}(\alpha)=\Delta_{j+1}(\beta^x)$。但$\beta^x\in\Delta_{k+1}(\alpha)$，故引理成立。

§2 定理的证明

假设定理不真而G为一个反例。则G为Ω上 2 一传递但非 2 一本原群。G不是$\lambda=1$的区组设计的自同构群，同时在Ω上也非强 2 一传递。

取$\alpha\in\Omega$，G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上是非本原群。取G_α的一个非本原集Δ，使得$G_{\alpha,\{\Delta\}}$在Δ上是本原的。显然$|\Delta|6q$，我们按$|\Delta|$分成五种情况证明，在每个情况下都导出矛盾，从而证明这样的反例是不存在的。

下面我们总设 $G_{\alpha,\{\Delta\}}=H$，若G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上有完全非本原系$\{\Delta_1=\Delta,\Delta_2,\cdots,\Delta_s\}$,我们令$K=\{x|x\in G_\alpha,\Delta_i^x=\Delta_i,\ i=1,2,\cdots,s\}$．显然$K\lhd G_\alpha$．

我们还假设$q>7$．因为若$q\leqslant 7$,则$n=6q+1=7,13,19,31,43$．在$n=7$和13时，$G=PSL(3,2)$或$PSL(3,3)$，它们都是$\lambda=1$的区组设计的自同构群。而当$n=19$和43时，$G\geqslant A_n$，故G为 2 一本原的。至于$n=31$时，则要么$G\geqslant A_n$要么$P\Gamma L(3,5)\geqslant G\geqslant PSL(3,5)$或$P\Gamma L(5,2)\geqslant G\geqslant PSL(5,2)$．所以G或为 2 一本原或为某$\lambda=1$的区组设计的自同构群。

下面分别考虑各种情况．

情况1．$|\Delta|=2,3$.

对于这种情况的讨论与 Atkinson 文〔2〕完全相同，我们予以省略。

情况2．$|\Delta|=6$

此时G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上有非本原集$\Delta_1=\Delta,\Delta_2,\cdots,\Delta q$．由于 6 级本原群都是 2 一本原的，H在$\Delta_1$上是 2 一本原的。故对$\beta\in\Delta_1$，$G_{\alpha,\beta}=H_\beta$有一个 5 长轨道$\Gamma_1=\Delta_1-\{\beta\}$由于$K\lhd H$，若$K\neq 1$,则K在$\Delta_1$上传递因而在每一个$\Delta_i$上都传递。

若Γ_1是$G_{\{\alpha,\beta\}}$一不变的，由引理 2 可得矛盾．故Γ_1在$G_{\{\alpha,\beta\}}$下变成$G_{\alpha,\beta}$的另一个 5 长轨道Γ_2．若Γ_2包含于某Δ_i内，则$G_{\alpha,\beta}$又有一不动点，由引理 1 又得矛盾。因此Γ_2必同时与几个Δ_i相交。但 5 为素数，故Γ_2恰与 5 个Δ_i相交。设和Γ_2相交的非本原集为$\Delta_2,\cdots,\Delta_6$。

今设G_α/K是$\{\Delta_1,\cdots,\Delta_q\}$上的可解群。则它在$\Delta_1$处的稳定子群在$\{\Delta_2,\cdots,\Delta_q\}$上半正则。因之$G_{\alpha,\beta}/K_\beta$在$\{\Delta_2,\cdots,\Delta_6\}$上正则。此时$G_{\alpha,\beta}$在$\Gamma_2$上因而在$\Gamma_1$上也正则。故H限制到$\Delta_1$上为30阶群。但这是不可能的。

于是G_α/K在$\{\Delta_1,\cdots,\Delta_q\}$上传递可解群，故为 2 一传递群。H/K在$\{\Delta_2,\cdots,\Delta_q\}$上传递，H在$\Omega-\{\Delta_1,\alpha\}$上传递。$G_{\alpha,\beta}$在$\Omega-\{\Delta_1,\alpha\}$上有一个 5 长轨道$\Gamma_2$，但$|H:G_{\alpha,\beta}|=6$，$|\Omega-\{\Delta_1\alpha\}|=6(q-1)$。由引理 4 得$6(q-1)|30$，故$q\leqslant 6$,矛盾．而当$K=1$时同样可得矛盾。

情况3. $|\Delta|=q$.

设$\Delta_1=\Delta,\Delta_2,\cdots,\Delta_6$是 G_α 在$\Omega-\{\alpha\}$上的一个完全非本原系. 因$q\,||G|$, $K\neq 1$. 故K在每一个 Δ_i 上本原。由于$|\Omega|=6q+1$ 而$6<q$. 由K.H.Appel 和E.T.Parker 的结果(见文〔1〕)知G的Sylow q —子群是q阶的。

今设K为可解的，则K中有正规的Sylow q-子群Q，而且$Q\lhd G_\alpha$，改查$C=C_{G_\alpha}(Q)$，则$C=Q\times D$, 其中$D\lhd G_\alpha$，且为q'-子群。

若$D\neq 1$, 则D在$\Omega-\{\alpha\}$上的轨道是G_α的非本原集。但D为q'-群，它的轨道长度为6的因子，这就化成为情况1, 2的讨论。

若$D=1$, 则 G_α 为亚循环群。设其阶为tq，则$t|\,q-1$. 而G_α在$\Omega-\{\alpha\}$上传递 故$6|t$。此时若$G_{\alpha,\beta}=1$, 则G为强2-传递的。若$G_{\alpha,\beta}\neq 1$, 则$G_{\alpha,\beta}$保持每一个Δ_i不变。但$t/6>1$ 且$t|q-1$, $G_{\alpha,\beta}$在每个Δ_i内有一个不动点。由引理1, G是有$\lambda=1$的区组设计的自同构群。

今设K为不可解群。于是K、从而H在Δ_1上为2-传递的。对$\beta\in\Delta_1$, $H_\beta=G_{\alpha,\beta}$在$\Gamma_1=\Delta_1-\{\beta\}$上传递。若$\Gamma_1$在$G_{\{\alpha,\beta\}}$下不变，则由引理2知定理得证。设$\Gamma_1$不是$G_{\{\alpha,\beta\}}$——不变的，那么由引理3知$G_{\alpha,\beta}$有另一个长度为$q-1$ 的轨道Γ_2而且$G_{\{\alpha,\beta\}}$还有一个同样长度的轨道Γ_3。Γ_3同时为$G_{\alpha,\beta}$的轨道。若Γ_2,Γ_3中有一个包含于某Δ_i内，则$G_{\alpha,\beta}$有第三个不动点，由引理1又得矛盾。故Γ_2、Γ_3中每一个至少和两个Δ_i相交。于是若$\Gamma_i\cap\Delta_j\neq\phi$, 则$|\Gamma_i\cap\Delta_j|\leqslant\frac{q-1}{2}$。

设K在Δ_i上的置换表示的指标为π_i($1\leqslant i\leqslant q$)。由于K在每一个Δ_i上2-传递，故$\pi_i=1+x_i$，其中1表示主指标而x_i为一个$q-1$级不可约指标。于是K_β在Δ_i上的轨道个数为$\langle\pi_1,\pi_i\rangle_K\leqslant 2$. 但$q\nmid|K_\beta|$, 故$K_\beta$在每个$\Delta_i$上恰有两个轨道。于是每一个$\Delta_i$至多与一个$\Gamma_j$相交。

这样一来我们可按下列三种情况讨论:

A) Γ_2与Δ_2,Δ_3相交而Γ_3与Δ_4,Δ_5相交。

此时，$G_{\alpha,\beta}$有下列轨道: $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4=\Delta_2\cup\Delta_3-\Gamma_2,\Gamma_5=\Delta_4\cup\Delta_5-\Gamma_3$, Γ_6, Γ_7。其中$\Gamma_6\cup\Gamma_7=\Delta_6$, $|\Gamma_6|$, $|\Gamma_7|<q-1$. 考查各轨道长度知Γ_6,Γ_7在$G_{\{\alpha,\beta\}}$下不变。于是Δ_6是G_α, G_β的共同的非本原集。这是不可能的。

B) Γ_2与Δ_2,Δ_3相交而Γ_3与$\Delta_4,\Delta_5,\Delta_6$相交。

此时$G_{\alpha,\beta}$的轨道为: $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4=\Delta_2\cup\Delta_3-\Gamma_2,\Gamma_5=\Delta_4\cup\Delta_6-\Gamma_3$. 考查其长度知$\Delta_4\cup\Delta_5\cup\Delta_6$是$G_{\{\alpha,\beta\}}$不变的。同时容易看出$\Delta_4\cup\Delta_5\cup\Delta_6$是$G_\alpha$和$G_\beta$的共同的非本原集，又得到矛盾。

C) Γ_2与$\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4$相交而$\Gamma_3$与$\Delta_5,\Delta_6$相交。

此时$G_{\alpha,\beta}$ 的轨道为: $\{\alpha\},\{\beta\},\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4=\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4-\Gamma_2,\Gamma_5=\Delta_5\cup\Delta_6-\Gamma_3$。$G_{\{\alpha,\beta\}}$的轨道为: $\{\alpha,\beta\},\Gamma_1\cup\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5$. 故$\Delta_5\cup\Delta_6$是$G_{\{\alpha,\beta\}}$—不变的。。令$M=G_{\{\Delta_5\cup\Delta_6\}}$, 则$H_\beta\leqslant M$, $K\leqslant M$. 因而M的轨道为$\alpha^M=\Omega-(\Delta_5\cup\Delta_6)$和$\Delta_5\cup\Delta_6$，前者的长度为$4q+1$. 但$|G:M|\cdot|M:M_\alpha|=|G:G_\alpha|\cdot|G_\alpha:M_\alpha|$, 且$H=KG_{\alpha,\beta}\leqslant M_\alpha$; 所以$|G:M|\leqslant\frac{6(6q+1)}{4q+1}$.

另一方面，$\{(\Delta_5\cup\Delta_6)^g|g\in G\}$为区组设计，以$(\Delta_5\cup\Delta_6)^g$为区组。设$\Omega$的每一个无序二元集恰出现于$\lambda_1$个区组内，则$\lambda_1(6q+1)\cdot 6q=|G:M|\cdot 2q(2q-1)$. 所以我们又有$|G:M|=\frac{3\lambda_1(6q+1)}{2q-1}\leqslant\frac{6(6q+1)}{4q+1}$. 于是$\lambda_1<1$, 但这是不可能的。

上述A、B、C包含了所有的可能，这就结束了情况3的讨论。

情况4. $|\Delta|=2q$

设$\Delta_1=\Delta,\Delta_2,\Delta_3$为$G_\alpha$的完全非本原系。我们按下列步骤证明在此情况下定理成立。

1）H在Δ_1上是本原的但非2-传递的。

实际上由于$|\Delta_1|$为偶数，若H为2-传递的，则对$\beta\in\Delta_1$，$G_{\alpha,\beta}$在$\Gamma_1=\Delta_1-\{\beta\}$上传递。此时要么$\Gamma_1$在$G_{\{\alpha,\beta\}}$下不变，要么$G_{\alpha,\beta}$有另一个与$\Gamma_1$等长的轨道$\Gamma_1$、且$\Gamma_2$包含于$\Delta_2$内或$\Delta_3$内，因而$G_{\alpha,\beta}$有至少三个不动点。在两种可能性下都导出矛盾。

于是H为Δ_1上的单本原群。根据Wielandt关于2p级本原群的理论知$2q=a^2+1$，$a\geqslant3$为一个奇数，且任取$\beta\in\Delta_1$，$G_{\alpha\beta}$在$\Delta_1-\{\beta\}$上有两个轨道Γ_1,Γ_2，$|\Gamma_1|=\frac{1}{2}a(a-1)$，$|\Gamma_2|=\frac{1}{2}a(a+1)$.

2）$H=K$即商群G_α/K为3阶群.

如果不然，$H>K$，G_α/K为6阶群。H把Δ_2,Δ_3交换，因而$G_{\alpha,\beta}$在$\Delta_2\cup\Delta_3$同时相交，且$|\Gamma\cap\Delta_2|=|\Gamma\cap\Delta_3|$，而$\Gamma\cap\Delta_2$，$\Gamma\cap\Delta_3$都是$K_\beta$的轨道。

容易看出，K在请Δ_i上都是本原的，K在Δ_i上的置换表示的指标为$1+\varphi_i+\psi_i$，其中1为主指标，而φ_i,ψ_i分别为q级和q－1级不可约指标。利用情况3同样的方法可证K_β在Δ_2，Δ_3上最多有三个轨道。于是若$|\Gamma_1|$为奇数，使用引理2、3知$G_{\alpha,\beta}$在Ω上的轨道是：$\{\alpha\}$，$\{\beta\}$，$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5$，其中$|\Gamma_2|=|\Gamma_3|=|\Gamma_4|$而$|\Gamma_5|=2+a(a-1)$。故$\Gamma_5$为最长的轨道。

考虑Γ_1和Γ_5.$(|\Gamma_1|,|\Gamma_5|)=1$.若$\gamma\in\Gamma_1$，则$G_{\alpha,\beta,\gamma}$在$\Gamma_5$上传递。而$G_{\alpha,\beta}$与$G_{\alpha,\gamma}$相似，故$\Gamma_5$也为$G_{\alpha,\gamma}$的轨道，因而也是$G_\alpha=\langle G_{\alpha,\beta},G_{\alpha,\gamma}\rangle$的轨道。这是不可能的。

若Γ_2为奇数，用上面的方法同样得到矛盾。

于是G_α/K为3阶群。由引理6，G有一个指数为3的正规子群N。N的秩为4，N_α的长度大于1的轨道为$\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$，而且$|\Delta_i|=2q$。

3）N的中心化子环是交换的〔见Wielandt〔11〕，定理29.5）。

4）N_α的各轨道都是自配对的。

实际上由于$|G|$为偶数，N为偶阶群。故至少有一个Δ_i是自配对的。但G_α内有一个3阶元素x，$\Delta_1^x=\Delta_2$，$\Delta_2^x=\Delta_1$，故4)成立。

考虑N的相交数矩阵V_0,V_1,V_2,V_3。由于4)它们的形状为：

$$V_0=\begin{array}{c}1\ 0\ 0\ 0\\ \left(\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\\ 0\ 0\ 0\ 1\end{array}\quad V_1=\begin{array}{c}0\ 1\ 0\ 0\\ \left(\begin{array}{cc}2q&\\0&\tilde{V}_1\end{array}\right)\\ 0\end{array}\quad V_2=\begin{array}{c}0\ 0\ 1\ 0\\ \left(\begin{array}{cc}0&\\2q&\tilde{V}_2\end{array}\right)\\ 0\end{array},\quad V_3=\begin{array}{c}0\ 0\ 0\ 1\\ \left(\begin{array}{cc}0&\\0&\tilde{V}_3\end{array}\right)\\ 2q\end{array}$$

其中

$$\tilde{V}_i=\begin{pmatrix}\mu_{11}^{(i)}&\mu_{12}^{(i)}&\mu_{13}^{(i)}\\ \mu_{21}^{(i)}&\mu_{22}^{(i)}&\mu_{23}^{(i)}\\ \mu_{31}^{(i)}&\mu_{32}^{(i)}&\mu_{33}^{(i)}\end{pmatrix}$$

5）由引理7 $\mu_{j,k}^{(i)}=\mu_{j+1,k+1}^{(i+1)}$。（式中加法按模3的加法进行）。

6）结论：在此情况下定理成立.

实际上，由于4)和各轨道Δ_i等长，我们有$\mu_{j,k}^{(i)}=\mu_{i,k}^{(j)}$和$\mu_{j,k}^{(i)}=\mu_{k,j}^{(i)}$，$i,j,k=1,2,3.$若令$\mu_{11}^{(1)}=k$，$\mu_{12}^{(1)}=l$，$\mu_{13}^{(1)}=m$，并考虑到5)和§1(2)，知$\mu_{23}^{(1)}=k+1$，且$V\tilde{V}_1$和$\tilde{V}_2$的

形状为

$$\widetilde{V}_1=\begin{pmatrix} k & l & m \\ l & m & k+1 \\ m & k+1 & l \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{V}_2=\begin{pmatrix} l & m & k+1 \\ m & k & l \\ k+1 & l & m \end{pmatrix}$$

由于Γ_1,Γ_2都是$G_{\alpha,\beta}$的轨道，Γ_1,Γ_2整个地包含于G_β的轨道内，且$\beta\overline{\in}\Delta_1(\alpha)\cap\Delta_i(\beta)$。故$k$，$l$，$m$中至少有一个为O。同时必要时交换$\Delta_2$和$\Delta_3$的地位，并以$x^2$代替$x$，所得$\widetilde{V}_1$，$\widetilde{V}_2$仍有5)中所述的关系。故我们可设$l\geqslant m$，若$l=m=0$则$k=2q-1$.则$\Delta_1-\{\beta\}$在$G_{\{\alpha,\beta\}}$下不变。由引理2推出矛盾。若$k=0$，则$\mu_{23}^{(1)}=1$，说明$G_{\alpha,\beta}=N_{\alpha,\beta}$除$\alpha$、$\beta$外还有不动点，由引理1又得矛盾。•于是$\widetilde{V}_1$的各系数的取值只有两种可能，

即
$$k=\frac{1}{2}a(a-1),\quad l=\frac{1}{2}a(a+1),\quad m=0$$

或
$$k=\frac{1}{2}a(a+1),\quad l=\frac{1}{2}a(a-1),\quad m=0.$$

但在这两种情形下$\widetilde{V}_1$与$\widetilde{V}_2$不交换。与3)矛盾。故定理当$|\Delta|=2q$时成立。

情况5. $|\Delta|=3q$..

此时Δ_1，Δ_2为G_α的全部非本原集。$|G_\alpha/K|=2$，由引理6知G有一个指数2的正规子群N，N在Ω上秩为3，N_α以$\{\alpha\}$，Δ_1，Δ_2为轨道。

若N为偶阶群，则Δ_1，Δ_2都是自配对的。考查N的相交数矩阵V_0，V_1，V_2。用与情况4相同的方法可知。

$$V_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3q & x & y \\ 0 & y & y \end{pmatrix}$$

但这导致$2y=3q$，这是不可能的。故N为奇数阶的，于是N为可解群。N_α在Δ_1上为可解本原群，$|\Delta_1|=3q$，故$q=3$和$q\geqslant7$的假设矛盾。这就完成了情况5的讨论。定理得证。

参 考 文 献

〔1〕K. I. Appel and E. T. Parker, On unsolvable groups of degree $p=4q+1$, p and q primes, Canad. J. Math., 19(1967), 583—589.

〔2〕M. D. Atkinson, Two theorems on doubly transitive permutation groups, J. London Math. Soc., (2)6 (1973), 269—274.

〔3〕——, Doubly transitive but not doubly primitive permutation groups. Ⅱ, J. London Math. Soc. (2) 10 (1975). 53—60.

〔4〕C. W. Curtis and I. Reiner, Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience (John Wiley and Sons), New York, 1962.

〔5〕M. Hall, The Theory of Groups, Macmillan, New York, 1959.

〔6〕D. G. Higman, Intersecrion matrices for fimite permutation groups, J. Algebra, 6 (1967), 22—42.
〔7〕P. M. Neumann, Transitive permutation groups of prime degree, J. London Math. Soc., (2) 5 (1972), 202—208.
〔8〕——, Transitive permutation groups of prime degree, Ⅱ, Characte-theorotic observations, Proc. London Math. Soc., (3)31 (1975), 482—494.
〔9〕——, Transitive Permutation Groups of Prime Degree, Proccedings of International Conference on Theory of Groups, Canberra 1973, Lecture Notes in Mathematics 372. (Springer-Verlag, Berlin 1974), 520—535.
〔10〕C. C. Sims, Computation Methods in the Study of Permutation Groups, Computational Problems in Abstract Alg bra, 169—183, John Leach (Editor) (Pergman Press 1970).
〔11〕H. Wielandt, Finite Permutation Groups, Academic Press, New York, 1964.

Deubly transitive permutation groups of degree 6q+1, q being a prime

Li Hailing *Shen Hong*
(Lanzhou University) (Xi'an Industry Iustitute)

Abstract

In〔3〕M. D. Atkinson conjectured that if G is a doubly transitive but not doubly primitive permutation group on Ω, then G is of one of the following four types: i) Metacyclic groups of prime degree p and of order $p(p-1)$; ii) Groups of degree 2^p and of order $2^p(2^p-1)$or $2^p(2^p-1)p$ for some prime p; iii)Groups of automorphisms of a block design with $\lambda=1$; iv) $Sz(q)\leqslant G\leqslant Aut(Sz(q))$.

In this paper we proved this conjecture in a special case without using the result of classification of finte simple groups. Qur explicit result is as follows:

Theorem. Let G be a doubly transitive group on set Ω, where $|\Omega|=6q+1$ and q is a prime, then one of the following holds:

i) G is doubly primitive on Ω;

ii) G is sharply doubly transitive on Ω;

iii) G is a groups of automorphisms of a block design with $\lambda=1$.