1986年3月

数学研究与评论
第六卷 第一期

关于p.n.p.矩阵的谱性质*

逄明贤

（吉林师范学院）

§1 引 言

定义1 设$A\in R^{n\times n}$，若A的每一k阶主子式是非正的，$1\leq k\leq n$，则称A是一偏非正矩阵，简称p.n.p.矩阵。

特别地，若一p.n.p.矩阵的每一k阶主子式是负的，$1\leq k\leq n$，则称此矩阵为偏负矩阵，简称为p.n.矩阵。

1974年J.J.Johnson给出了p.n.p.矩阵具有一负特征值的充分条件以及p.n.矩阵的两个谱性质。

本文给出了p.n.p.矩阵特征值分布的估计，讨论了p.n.p.矩阵的若干谱性质，把Johnson关于p.n.矩阵的两个谱性质直接推广到p.n.q.矩阵上。

§2 主要结果

定理1 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为p.n.p.矩阵，则

1）A的特征值之实部不全为正；

2）A至少有一非正实特征值；

3）若A还是非奇异的，则A恰有奇数个负特征值。更进一步地，A的正特征值个数l（t重特征值算作t个）满足

$$0\leq l=n-(2m+1)$$

这里n为此矩阵之阶数，m为一非负整数。

证：设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为A的全部特征值。先证1）。如果A的全部特征值之实部皆为正，则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\lambda_i>0$$

另一方面又由A为p.n.p.矩阵知有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\leq 0$$

* 1982年5月20日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

此矛盾说明 1）成立。

再来证 2）断言A必有实特征值，否则A的每一特征值λ_i都为非零复数，进而由A的非零复特征值成共轭出现得到

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|>0$$

此矛盾于$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det A\leqslant 0$。这说明A必有实特征值。进而若A之实特征值皆正，则仍有$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i>0$，这仍为矛盾。故知A必有非正实特征值。

最后证 3）由A为非奇异p.n.p.矩阵知

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det A<0,$$

再由 2）立见A必有负特征值。进一步注意到A的全部非零复特征值之积自然为正，由$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i<0$就导出A的负特征值个数应为奇数，最后，因A的非零复特征值成共轭出现，自然A的非零复特征值总数与A的负特征值总数之和仍为奇数，设为$2m+1$，m为一非负整数。这样一来，A的正特征值个数l便为

$$0<l=n-(2m+1)$$

这儿n为A之阶数。定理证完。

1974年，J. J. Johnson证明了：若A为一p.n.矩阵，则A有一负特征值λ_1使$|\lambda_1|=\rho(A)$。现在，我们来进一步证明如下结果：

定理 2 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为非奇异p.n.p.矩阵，则A有一单重负特征值$\lambda_1$，使得$|\lambda_1|=\rho(A)$.

证：记A之1阶，2阶，…，n阶主子式之和分别为$-s_1,-s_2,\cdots-s_n$。则$s_i\geqslant 0$且$s_n>0$，$i=1,2,\cdots,n$，注意A为非奇异p.n.p.矩阵。于是$B=-A$之特征多项式$f_B(\lambda)$可表为

$$f_B(\lambda)=\lambda^n-\sum_{k=1}^{n}s_k\lambda^{n-k}$$

构造Frobenius阵（见〔2〕p45）

$$C=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&s_n\\1&0&\cdots&0&s_{n-1}\\0&1&\ddots&0&s_{n-2}\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1&s_1\end{pmatrix}\geqslant 0$$

则C之特征多项式$f_c(\lambda)$应为

$$f_C(\lambda)=\det(\lambda I-C)=\lambda^n-\sum_{k=1}^{n}s_k\lambda^{n-k}=f_B(\lambda)$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

可见C与B = $-$A有相同的特征值。注意$s_n > 0$，故C为强连接的，从而C为非负不可约矩阵。由Perron-Frobenius定理即知C有一单重正特征值$-\lambda_1 = \rho(C)$，因此A = $-$B有一单重负特征值λ_1使得$|\lambda_1| = \rho(C) = \rho(B) = \rho(A)$ 证毕。

显然p. n. 矩阵是特殊的非奇异p. n. p. 矩阵，故〔1〕中定理2是本定理之特款。

J. J. Johnson 给出了一类特殊的p. n. 矩的谱性质：若A是有一列元皆为负元的p. n. 矩阵，则A有一单重负特征值λ_1使$|\lambda_1| = \rho(A) > |\lambda|$，这儿$\lambda$是A的其他特征值。我们来证明更好的结果（下文的定理3）。为此，先证明下面的引理：

引理1 设$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$为一p. n. p. 矩阵。若A满足：

1）$a_{ii} \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$；　2）A有某一列皆为负元，

则A的全部元皆为负元，即$A < 0$。

证：不失一般性，设$a_{j2} < 0$，$j = 1, 2, \cdots, n$。我们先证明，当$2 \leqslant i, j \leqslant n$时，$a_{ij} < 0$。因A为p. n. p. 矩阵，故知$a_{ii} < 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 再注意到A的全部二阶主子式皆非正，即知A的第二行诸元a_{2j}皆为负元（$j = 1, 2, \cdots, n$）：因由

$$\det A\begin{Bmatrix} 2 & j \\ 2 & j \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{2j} \\ a_{j2} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{22}a_{jj} - a_{2j}a_{j2} \leqslant 0$$

即知$a_{2j}a_{j2} \geqslant a_{22}a_{jj} > 0$，再由$a_{j2} < 0$便得$a_{2j} < 0$，$j = 1, 2, \cdots, n$。

我们对$j \geqslant 4$时计算三阶主子式$\det A\begin{Bmatrix} 2 & 3 & j \\ 2 & 3 & j \end{Bmatrix}$ 得到

$$\det A\begin{Bmatrix} 2 & 3 & j \\ 2 & 3 & j \end{Bmatrix} = a_{j2}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{2j} \\ a_{33} & a_{3j} \end{vmatrix} - a_{j3}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{2j} \\ a_{32} & a_{3j} \end{vmatrix} + a_{jj}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这里仅需确定a_{3j}与a_{j3}的符号。如若有$a_{3j} \geqslant 0$，则由a_{j2}，a_{23}，a_{33}，a_{2j} 皆< 0知有

$$a_{2j}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{2j} \\ a_{33} & a_{3j} \end{vmatrix} > 0$$

又因$a_{jj} < 0$及$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0$知有

$$a_{jj}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

但A之三阶主子式 $\det A\begin{Bmatrix} 2 & 3 & j \\ 2 & 3 & j \end{Bmatrix} < 0$，

故必有$-a_{j3}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{2j} \\ a_{32} & a_{3j} \end{vmatrix} < 0$。再从$a_{22}$，$a_{2j}$，$a_{32}$皆$< 0$以及$a_{3j} \geqslant 0$又得$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{2j} \\ a_{32} & a_{3j} \end{vmatrix} < 0$，从而进一步推出$a_{j3} < 0$

而由A之二阶主子式$\det A\begin{Bmatrix} 3 & j \\ 3 & j \end{Bmatrix} = a_{33}a_{jj} - a_{3j}a_{j3} \leqslant 0$ 推出$a_{3j}a_{j3} \geqslant a_{33}a_{jj} > 0$，说明$a_{3j}$与$a_{j3}$应为同号（皆非零），这便矛盾于$a_{3j} \geqslant 0$之假设。可见必有$a_{3j} < 0$，进而亦有$a_{j3} < 0$。这就导出

$$a_{3j} < 0, \quad a_{j3} < 0, \quad 当 j \geqslant 3 时.$$

依次对$\det A\begin{Bmatrix} 2 & l & j \\ 2 & l & j \end{Bmatrix}$，$4 \leqslant l \leqslant n-1$，$l+1 \leqslant j \leqslant n$进行类似的讨论，可以确定$a_{lj} < 0$，$a_{jl} < 0$，当$4 \leqslant l \leqslant n-1$，$l+1 \leqslant j \leqslant n$时.

这样我们就得出

$a_{ij} < 0$，当$2 \leqslant i, j \leqslant n$时.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

对于当$3\leqslant j\leqslant n$时$a_{1j}<0$以及$a_{j1}<0$之证明，只需对三阶主子式$\det A\begin{Bmatrix}1&2&j\\1&2&j\end{Bmatrix}$进行同上面相类似的讨论，不再赘述。引理证完。

现在给出[1]之定理3的改进：

定理3 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为一p.n.p.矩阵。若A满足：

1）$a_{ii}\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$；

2）A有某一列皆为负元，

则 1）$A<0$；

2）A有一单重负特征值λ_1使

$$|\lambda_1|=\rho(A)>|\lambda|,$$

这儿λ为A之所有其他特征值；

3）对于λ_1，相应有一特征向量$X>0$；

4）当A的任一元减少时，λ_1也减少，从而$\rho(A)$增加。

证：由引理1知$-A=B>0$，即$A<0$，再由Perron-Frobenius定理，即知B有一单重正特征值α使$\alpha=\rho(B)>|\mu|$这儿μ为B的其他特征值。对于α相应有一正特征向量X。而B的每一特征值之负数恰为A的特征值，相应于B的每一特征值μ的特征向量亦为相应于A的特征值$\lambda=-\mu$的特征向量，于是$\lambda_1=-\alpha<0$即为A的满足$|\lambda_1|=\rho(A)$之单重负特征值，$X>0$为相应于λ_1之A的特征向量，故2）、3）成立又当B的任一元增加时，即A的相应元减少时，$\rho(B)=\rho(A)$为增加，而此时λ_1为减少，故4）为真。证毕。

注意任一p.n.阵之主对角元皆为负，故[1]之定理3是本定理之特例。

如所周知，若A为p.n.p.矩阵，则A^T亦然。这样一来，上述定理3的假设条件"2）A有某一列皆为负元"可换为"2）A有某一行皆为负元"，而定理之结论仍然为真。

下面我们从另一个角度来考虑p.n.p.矩阵的谱性质。它既不同于定理2那样要求p.n.p.矩阵非奇异，也不同于定理3那样要求p.n.p.矩阵的全部元为负元。为此，我们再引进

引理2 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$是一p.n.p.矩阵。若A满足$j>i$时有$a_{ij}<0$，$i=1,\cdots,n-1$，$j=2,\cdots,n$。则A之全部元皆为非正元，即$A\leqslant 0$。

证：由A是p.n.p.矩阵知$a_{ii}\leqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$。故只须证当$j>i$时，有$a_{ji}\leqslant 0$，$i=1,\cdots,n-1$，$j=2,\cdots,n$。事实上，对任意$j>i$，考虑A之二阶主子式$\det A\begin{Bmatrix}i&j\\i&j\end{Bmatrix}$之展开式

$$\det A\begin{Bmatrix}i&j\\i&j\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}a_{ii}&a_{ij}\\a_{ji}&a_{ji}\end{vmatrix}=a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji}$$

因A为p.n.p.矩阵，故必$a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji}\leqslant 0$，亦即$a_{ij}a_{ji}\geqslant a_{ii}a_{jj}\geqslant 0$。因此时$a_{ij}<0$，故立得得$a_{ji}\leqslant 0$。注意到$j>i$之任意性，便知A之全部元皆为非正元，亦即$A\leqslant 0$。证毕。

直接应用引理2我们得到

定理4 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为一p.n.p.矩阵。若A满足当$j>i$时，$a_{ij}<0$，$i=1,\cdots,n-1$，$j=2,\cdots,n$，则

1）　$A\leqslant 0$；

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

2）A有一非正特征值λ_1满足$|\lambda_1|=\rho(A)$。此外，这特征值为负，除非A为可约并且A的法式为严格上三角形矩阵；

3）对应于λ_1有特征向量$X\geqslant 0$；

4）当A的任一元素减少时，λ_1不增加，从而$\rho(A)$不减少。

证：由引理2知$-A=B\geqslant 0$，即$A\leqslant 0$。对B应用推广的Perron—Frobenius定理，同时注意到B的每一特征值之负数恰为A的特征值，且相应于B的任一特征值μ的特征向量也恰是相应于A的特征值$\lambda=-\mu$的特征向量，当B的任一元增加时，A的相应元素减少，以及$\rho(A)=\rho(B)$，即知定理的全部结论成立。

因为A为p.n.p.矩阵充分而且必要的条件是A^T为p.n.p.矩阵，故立得

推论1 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为一p.n.p.矩阵。若A满足当$i>j$时，$a_{ij}<0$，$i=2,\cdots,n$，$j=1,\cdots,n-1$。则定理4的全部结论仍然成立。

在引理2的证明中知，当诸$a_{ii}<0$时（$i=1,2,\cdots,n$）必有$a_{ij}<0$以及$a_{ji}<0$，$j=1,2,\cdots,n$。因此又有

推论2 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为一p.n.p.矩阵。若A满足当$j\geqslant i$时（或$i\geqslant j$时）$a_{ij}<0$，则定理3的全部结论成立。

这说明定理3所涉及到的矩阵类可以看作定理4所涉及到的矩阵类之子集。但推论2之假设条件显然比引理1之假设条件要严格得多，因此定理3是不能为定理4所代替的。

下面我们给出一个例子来说明上面的问题。令

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

则知A与B分别为满足定理4及定理3的p.n.p.矩阵。它们的特征值分别为$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，1，$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$及0，0，-3。显然$\left|\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right|=\rho(A)$及$|-3|=\rho(B)$。可见A也完全具备定理3之结果，这只需注意到$-A$是本原指标为5的非负不可约矩阵。但A的元素并不皆为负元。因此，在实际上定理4为我们提供了一个构造具有以谱半径为模的单重负特征值的p.n.p.矩阵的简单方法：只须令$-n$阶方阵主对角线上方诸元皆为负，再令$(n,1)$处为负元就行了。

作者感谢佟文廷老师的帮助和指导。

参考文献

〔1〕Johnson, J. J., On Partially Non-Positive Matrices, Linear Alg. Appl., 8 (1974), 185—184.

〔2〕Varg, R. A., Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1962. 有中译本：蒋尔雄、游兆永、张玉德译，矩阵叠代分析，上海科技出版社 1966.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.