1986年3月

数学研究与评论
第六卷 第一期

用微分不等式对二阶拟线性方程奇摄动群的估计*

莫 嘉 琪

（安徽师范大学）

考虑二阶拟线性方程两点问题

$\varepsilon y'' + f_1(x,y,\varepsilon)y' + f_2(x,y,\varepsilon) = 0, \quad 0<x<1$ （1）

$y(o,\varepsilon) = A(\varepsilon),$

$y(1,\varepsilon) = B(\varepsilon)$

上述问题已在某些文献中作了一些讨论，例如，O'Malley（〔1〕，〔2〕），Dorr等（〔3〕）。他们分别利用了积分方程的估计法及极值原理，在一定的条件限制下，对问题（1）—（3）解的存在性及其渐近性态作了研究。但本文用的是微分不等式方法（〔6〕）对本问题的解作了估计，得到了解$y(x,\varepsilon)$在〔0,1〕上任意阶的一致有效的渐近展开式，其结果更为良好，方法更为简便。

一、构 造 形 式 解

设$f_1(x,y,\varepsilon)\geqslant k$，$k$为正常数。考虑对应于问题（1）—（3）的退化问题

$f_1(x,y,o)y' + f_2(x,y,o) = 0, \ 0<x<1$ （4）

$y(1) = B(0)$， （5）

记其解为$y=y_0(x)$。现设$Y(x,\varepsilon)$为原问题（1）—（3）的外部解，它在$0<x<1$内的渐近展开式为

$$Y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i(x)\varepsilon^i + \cdots \tag{6}$$

并设$f_1(x,y,\varepsilon)$，$f_2(x,y,\varepsilon)$，$A(\varepsilon)$，$B(\varepsilon)$关于所有变元有直到$m+1$阶连续，则利用Taylor公式有：

$$f_1(x,y,\varepsilon) \equiv F_1(\varepsilon) = f_1(x,y_0,o) + \sum_{j=1}^{m} F_{1j}\varepsilon^j + r_1, \tag{7}$$

$$f_2(x,y,\varepsilon) \equiv F_2(\varepsilon) = f_2(x,y_0,o) + \sum_{j=1}^{m} F_{2j}\varepsilon^j + r_2。 \tag{8}$$

$$A(\varepsilon) = A(0) + \sum_{i=1}^{m} A_j\varepsilon^j + r_3, \tag{9}$$

$$B(\varepsilon) = B(0) + \sum_{j=1}^{m} B_j\varepsilon^j + r_4, \tag{10}$$

1984年10月27日收到

其中

$$F_{ji}=\frac{1}{i!}F_j^{(i)}(0)=f_{jy}(x,y_0,o)y_i+G_{ji}(x,y_0,y_1,\cdots,y_{i-1}),\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2)。$$

$$A_i=\frac{1}{i!}A^{(i)}(0),\quad B_i=\frac{1}{i!}B^{(i)}(0),\ (i=1,2,\cdots,m)$$

而r_i，$i=1,2,3,4$，分别为f_1、f_2，A、B关于ε的Taylor展开的余项。

将（7），（8）、（10）形式地代入（1）（3）得：

$$\varepsilon Y''+\left[f_1(x,y_0,o)+\sum_{i=1}^{m}F_{1i}\varepsilon^i+r_1\right]Y'+\left[f_2(x,y_0,o)\varepsilon+\sum_{i=1}^{m}F_{2i}\varepsilon^i+r_2\right]=0 \tag{11}$$

$$Y(1,\varepsilon)=B(0)+\sum_{i=1}^{m}B_i\varepsilon^i+r_4, \tag{12}$$

其中$'$表示对x导数（下文均同）。再将（6）代入，合并ε的同次幂项，并令其系数对应相等，得

$$f_1(x,y_0,o)y_i'+(f_{1y}(x,y_0,o)y_0'+f_{2y}(x,y_0,o))y_i+G_i(x,y_0,y_1,\cdots,y_{i-1})+y_{i-1}''=0,\ (i-1,2,\cdots,m) \tag{13}$$

$$y_i(1)=\frac{1}{i!}B^{(i)}(0),\quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{14}$$

其中

$$G_i\equiv\sum_{k=1}^{m}F_{1k}y_{i-k}'+G_{1i}y_0'+G_{2i},\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

在（13），（14）中把y_i，$i=0,1,\cdots,i-1$，看作已知，可依次得到解

$$y_i=y_i(x),\ (i=1,2,\cdots,m) \tag{15}$$

把（15）代入（6），便可得到原问题的外部解的m阶形式渐近展开式。

现在来形式地构造在$x=0$处附近的边界层校正正项。令

$$y(x,\varepsilon)=Y(x,\varepsilon)+\xi(\tau,\varepsilon), \tag{16}$$

其中τ为伸长变量

$$\tau=\frac{x}{\varepsilon},$$

而边界层校正项ξ的渐近展开式设为：

$$\xi(\tau,\varepsilon)=\xi_0(\tau)+\sum_{i=1}^{m}\xi_i(\tau)\varepsilon^i+\cdots。 \tag{17}$$

因为外部解$Y(x,\varepsilon)$满足方程（1），因此边界层校正项$\xi(\tau,\varepsilon)$应满足：

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+f_1(\varepsilon\tau,\ Y(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\frac{d\xi}{d\tau}$$

$$+\varepsilon[(f_1(\varepsilon\tau, Y(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-f_1(\varepsilon\tau, Y(\varepsilon\tau,\varepsilon))\frac{dY}{dt}$$

$$+f_2(\varepsilon\tau, Y(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-f_2(\varepsilon\tau, Y(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon)]=0 \tag{18}$$

及初始条件

$$\xi(0,\varepsilon)=A(\varepsilon)-Y(0,\varepsilon)。 \tag{19}$$

将（17）代入（18），并令$\varepsilon=0$，可得

$$\frac{d^2\xi_0}{d\tau^2}+f_1(0,y_0(0)+\xi_0(\tau),0)\frac{d\xi_0}{d\tau}=0$$

考虑到ξ为边界层校正项，根据它应满足的性质，由上式知，ξ_0必须满足：

$$\frac{d\xi_0}{d\tau}=-\int_0^{\xi_0} f_1(0,y_0(0)+\eta,o)d\eta,\ (\tau\geqslant 0) \tag{20}$$

又由（19）

$$\xi_0(0)=A(0)-y_0(0)。 \tag{21}$$

不难证明（20），（21）存在唯一的$\xi_0(\tau)$，一般地，我们可以用逐次逼近法求得，且

$$|\xi_0(\tau)|\leqslant|A(0)-y_0(0)|e^{-k\tau}。\quad(\tau\geqslant 0) \tag{22}$$

由（17），（18），（19），令ε^i的系数对应相等，还可得到ξ_i应满足的线性方程：

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2}+f_1(0,y_0(0)+\xi_0(\tau),o)\frac{d\xi_i}{d\tau}+f_{1y}(o,y_0(o)+\xi_0(\tau),o)\frac{d\xi_0}{d\tau}\xi_i=c_i(\tau),$$

$$(i=1,2,\cdots,m) \tag{23}$$

其中$c_i(\tau)$为y_i，$j=0,1,\cdots,i$，ξ_j，$j=0,1,\cdots,i-1$，的函数及初始条件

$$\xi_i(0)=\frac{1}{i!}A^{(i)}(0)-y_i(0),\ (i=1,2,\cdots,m) \tag{24}$$

不难证明（23），（24）存在唯一的解$\xi_i(\tau)$，且

$$\xi_i(\tau)=O(e^{-k(1-\delta_i)\tau}),\quad(i=1,2,\cdots,m) \tag{25}$$

其中δ_i为任意小于1的正数。

由此，我们在形式上得到了问题（1）—（3）的m阶渐近式：

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m}(y_i(x)+\xi_i(\frac{x}{\varepsilon}))\varepsilon^i+R_m。 \tag{26}$$

二、余 项 估 计

现在我们来证明，在一定的条件下（26）中的余项R_m在 $0\leqslant x\leqslant 1$上一致地成立：

$$R_m=O(\varepsilon^{m+1})。\qquad 0<\varepsilon\ll 1$$

即存在问题（1）—（3）的一个解$y(x,\varepsilon)$，在$0\leqslant x\leqslant 1$上有一致有效的m阶渐近展开式：

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m}\left(y_i(x)+\xi_i(\frac{x}{\varepsilon})\right)\varepsilon^i+O(\varepsilon^{m+1}j),\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0<\varepsilon\ll 1) \tag{27}$$

为此，我们假设：

〔I〕退化问题（4），（5）存在一个解$y=y_0(x)\in C^{(2)}[0,1]$。

〔Ⅱ〕$f_1(x,y,\varepsilon)y'+f_2(x,y,\varepsilon)\in C^{(m+1)}(\Omega)$，其中Ω为：

Ω：$0<x<1$，$|y-y_0(x)|\leqslant d, |y'|<\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$（$d, \varepsilon_1$为某正常数）。

〔Ⅲ〕存在一个正常数k，使在Ω上成立：

$$f_1'>k\ 。$$

〔Ⅳ〕$f_1(x,y,\varepsilon)y'+f_2(x,y,\varepsilon)$满足Nagumo条件[4]。

〔Ⅴ〕$A(\varepsilon), B(\varepsilon)\in C^{(m+1)}[0,\varepsilon_1]$。

为了用微分不等式来证明估计式（27），我们先构造两个函数$\alpha(x,\varepsilon), \beta(x,\varepsilon)$：

$$\alpha(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m}\left(y_i(x)+\xi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon^i-\frac{\varepsilon^{m+1}}{l}\quad(2e^{\lambda(x-1)}-1), \tag{28}$$

$$\beta(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m}\left(y_i(x)+\xi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon^i+\frac{\varepsilon^{m+1}r}{l}(2e^{\lambda(x-1)}-1), \tag{29}$$

其中r为一正常数，将在以后决定，l为某一正常数，使得

$$\left|f_{1y}(x,y,\varepsilon)\left(\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\varepsilon^i\right)+f_{2y}(x,y,\varepsilon)\right|\leqslant l\ ,$$

由假设及ξ_i的性质（22），（25）知，上述l总是存在的，而λ为$\varepsilon\lambda^2+k\lambda+l=0$的一个根，此根当$\varepsilon\leqslant\frac{k}{4l}$时，恒为负实数，且可表示为：

$$\lambda=-\frac{l}{k}+O(\varepsilon),\qquad(0<\varepsilon\ll 1) \tag{30}$$

取$\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\frac{k^2}{4l}\}$，现对$\alpha(x,\varepsilon)\beta(x,\varepsilon)$在$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时建立几个关系式。

由（4），（5），（13）。（14），（20），（21），（23），（24）知，$y_i(x)\in C^{(2)}[0,1], \xi_i(\frac{x}{\varepsilon})\in C^{(2)}[0,1]$，所以关于$x$恒有：

$$\alpha(x,\varepsilon)\in C^{(2)}[0,1], \beta(x,\varepsilon)\in C^{(2)}[0,1] \tag{31}$$

且

$$\alpha(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,\varepsilon) \tag{32}$$

由（21），（24）知，存在足够大的正数r_0，当$r\geqslant r_0$时有：

$$\alpha(0,\varepsilon)\leqslant A(\varepsilon)\leqslant\beta(0,\varepsilon) \tag{33}$$

因为$B(\varepsilon)\in C^{(m+1)}[0,\varepsilon_0]$，并考虑到$\xi_i$的性质，我们有：

$$\left|B(\varepsilon)-\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}B^{(i)}(0)\varepsilon^i\right|\leqslant\sigma_1\varepsilon^{m+1},\qquad\left|\sum_{i=0}^{m}\xi_i\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^i\right|\leqslant\sigma_1\varepsilon^{m+1},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$$

其中σ_1为某一正常数，今选取r,使$r\geqslant\max\{2l\sigma_1, r_0\}$，考虑到（5），（14），这时有

$$\alpha(1,\varepsilon)\leqslant\sum_{i=0}^{m}\left(y_i(1)+\xi_i\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon^i-\frac{\varepsilon^{m+1}r}{l}=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}B^{(i)}(0)\varepsilon^i+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\xi_i\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^i-\frac{\varepsilon^{m+1}r}{l}\leqslant B(\varepsilon),$$

$$\beta(1,\varepsilon)>\sum_{i=0}^{m}(y_i(1)+\xi_i(\frac{1}{\varepsilon}))\varepsilon^i+\frac{\varepsilon^{m+1}r}{l}=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}B^{(i)}(0)\varepsilon^i+\sum_{i=0}^{m}\xi_i(\frac{1}{\varepsilon})\varepsilon^i+$$

$$+\frac{\varepsilon^{m+1}r}{l}\geqslant B(\varepsilon)。$$

故

$$a(1,\varepsilon)\leqslant B(\varepsilon)\leqslant\beta(1,\varepsilon)。\tag{34}$$

利用中值定理，当$0<x<1$时，有如下关系式；

$$\begin{aligned}&f_1(x,a,\varepsilon)a'+f_2(x,a,\varepsilon)\\&=f_1\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\ \varepsilon\right)\left(\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\varepsilon^i\right)+f_2\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\varepsilon\right)\\&+\left[f_{1y}(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i+\theta_1(a-\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i),\varepsilon\right)\left(\sum_{i=0}^{m}(y_j'+\xi_i')\varepsilon^i\right)\\&+f_{2y}\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i+\theta_1(a-\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i),\varepsilon\right)\Big]\left[a-\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i\right]\\&+f_1(x,a,\varepsilon)\left[a'-\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\varepsilon^i\right],\qquad 0<\theta_1<1\end{aligned}\tag{35}$$

$$\begin{aligned}&f_1(x,\beta,\varepsilon)\beta'+f_2(x,\beta,\varepsilon)\\&=f_1\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\varepsilon\right)\left(\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\varepsilon^i\right)+f_2\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\ \varepsilon\right)\\&+\Big[f_{1y}\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i+\theta_2(\beta-\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i),\varepsilon\right)\left(\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\varepsilon^i\right)\\&+f_{2y}\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i+\theta_2(\beta-\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i)\varepsilon\right)\Big]\left[\beta-\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i\right]\\&+f_1(x,\beta,\varepsilon)\left[\beta'-\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\varepsilon^i\right],\quad 0<\theta_2<1\end{aligned}\tag{36}$$

由于$y_0(x)$满足（4），并由（13），（20），（23），且考虑到（7），（8）得：

$$\begin{aligned}&f_1\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\varepsilon\right)\left(\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\xi^i\right)+f_2\left(x,\ \sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\varepsilon\right)\\&=\left[f_1(x,y_0,0)y_0'+f_2(x,y_0,0)\right]\\&+\sum_{i=1}^{m}\Big[f_1(x,y_00)y_i'+\left(f_{1y}(x,y_0,\ 0)y_0'+f_{2y}(x,y_0,\ 0)\right)y_i+G_i+y_{i-1}''\\&-y_{i-1}''\Big]\varepsilon^i+\frac{1}{\varepsilon}\ \left\{\left[\frac{d^2\xi_0}{d\tau^2}+f_1(x,y_0(0)+\xi_0(\tau),0)\frac{d\xi_0}{d\tau}-\frac{d^2\xi_0}{d\tau^2}\right]\right.\\&+\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2}+f_1(x,y_0(0)+\xi_0(\tau),0)\frac{d\xi_i}{d\tau}+f_{1y}(0,y_0(0)+\xi_0(\tau),0)\frac{d\xi_0}{d\tau}\xi_i\end{aligned}$$

$$-C_i(\tau)-\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2}\Big]\varepsilon^i\Big\}+O(\varepsilon^{m+1})$$

$$=-\varepsilon\Big[\sum_{i=0}^{m-1}(y_i''+\xi_i'')\varepsilon^i+\xi_m''\varepsilon^m\Big]+O(\varepsilon^{m+1}),\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$$

故有

$$f_1(x,\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\varepsilon)(\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\varepsilon^i)+f_2(x,\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\varepsilon)$$

$$\leqslant-\varepsilon[\sum_{i=0}^{m-1}(y_i''+\xi_i'')\varepsilon^i+\xi_m''\varepsilon^m]+\sigma_2\varepsilon^{m+1},\tag{37}$$

$$f_1(x,\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\varepsilon)(\sum_{i=0}^{m}(y_i'+\xi_i')\varepsilon^i)+f_2(x,\sum_{i=0}^{m}(y_i+\xi_i)\varepsilon^i,\varepsilon)$$

$$\geqslant-\varepsilon[\sum_{i=0}^{m-1}(y_i''+\xi_i'')\varepsilon^i+\xi_m''\varepsilon^m]-\sigma_2\varepsilon^{m+1}\tag{38}$$

其中σ_2为某一正常数。

由（28），（29）及（35）—（38）和$|y_m''(x)|\leqslant$M，M为某一正常数，以及λ为$\varepsilon\lambda^2+k\lambda+l=0$ 的根，再进一步选取$r=\max\{2l\sigma_1,\mathrm{M}+\sigma_2,r_0\}$，有

$$\varepsilon\alpha''+f_1(x,\alpha,\varepsilon)\alpha'+f_2(x,\alpha,\varepsilon)$$

$$\geqslant\varepsilon\Big(\sum_{i=0}^{m}(y_i''+\xi_i'')\varepsilon^i-2\varepsilon^{m+1}\frac{\lambda r}{l}e^{\lambda(x-1)}\Big)$$

$$-\Big(\varepsilon[\sum_{i=0}^{m-1}(y_i''+\xi_i'')\varepsilon^i+\xi_m''\varepsilon^m]+\sigma_2\varepsilon^{m+1}\Big)$$

$$-\varepsilon^{m+1}r[e^{\lambda(x-1)}-1]-2\varepsilon^{m+1}\frac{k\lambda r}{l}e^{\lambda(x-1)}$$

$$\geqslant-(\mathrm{M}+\sigma_2-r)\varepsilon^{m+1}-2(\varepsilon\lambda^2+k\lambda+l)\frac{r}{l}e^{\lambda(x-1)}\varepsilon^{m+1}$$

$$=-(\mathrm{M}+\sigma_2-r)\varepsilon^{m+1}\geqslant0,\qquad 0<x<1\tag{39}$$

$$\varepsilon\beta''+f_1(x,\beta,\varepsilon)\beta'+f_2(x,\beta,\varepsilon)$$

$$\leqslant\varepsilon\Big(\sum_{i=0}^{m}(y_i''+\xi_i'')\varepsilon^i+2\varepsilon^{m+1}\frac{\lambda r}{l}e^{\lambda(x-1)}\Big)$$

$$+\Big(-\varepsilon\Big[\sum_{i=0}^{m-1}(y_i''+\xi_i'')\varepsilon^i+\xi_m''\varepsilon^m\Big]+\sigma_2\varepsilon^{m+1}\Big)$$

$$+\varepsilon^{m+1}r(e^{\lambda(x-1)}-1)+2\varepsilon^{m+1}\frac{k\lambda r}{l}e^{\lambda(x-1)}$$

$$\leqslant(\mathrm{M}+\sigma_2-r)\varepsilon^{m+1}+2(\varepsilon\lambda^2+k\lambda+l)\frac{r}{l}e^{\lambda(x-1)}\varepsilon^{m+1}$$

$$=(\mathrm{M}+\sigma_2-r)\varepsilon^{m+1}。\qquad 0<x<1\tag{40}$$

根据上述对$\alpha(x,\varepsilon)$，$\beta(x,\varepsilon)$的关系式（31）—（34），（39），（40），利用Nagumo定理[4],[5]知，两点问题（1）—（3）有一个解$y(x,\varepsilon)\in C^{(2)}$，并成立不等式：

$$\alpha(x,\varepsilon)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,\varepsilon),\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

再由（28），（29），并考虑到（9）、（19）、（21）、（24）、（30）、可得

$$|R_m|=\left|y(x,\varepsilon)-\sum_{i=0}^{m}\left(y_i(x)+\xi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon^i\right|\leqslant K\varepsilon^{m+1}。$$

其中K为某一常数，由此便得到了关系式（27）。这就是我们所要证明的。为此，成立如下定理：

定理若在上面所述的假设〔Ⅰ〕—〔Ⅴ〕下，则存在两点问题（1）—（3）的一个解$y(x,\varepsilon)\in C^2(0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$，且成立一致有效的渐近展开式（27），其中$y_i(x)$为（13）、（14）的解，$\xi_i(\tau)$ $\tau=\dfrac{x}{\varepsilon}$，相应地为（20），（21）和（23），（24）的具有边界层性质的解，它们都可依次地求出。

注：当$f_1(x,y,\varepsilon)\leqslant -k<0$时，在相应的假设下，两点问题（1）—（3）的退化问题为

$$f_1(x,y,0)y'+f(x,y,0)=0,\quad 0<x<1$$

$$y(0)=A(0)。$$

设其解为$y_0(x)$。并可用前面类似的方法依次求出$y_i(x)$和$\xi_i(\tau)$，$\tau=\dfrac{1-x}{\varepsilon}$，则也存在问题（1）—（3）的一个解$y(x,\varepsilon)\in C^{(2)}$，且在$0\leqslant x\leqslant 1$上成立一致有效的渐近展开式：

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m}\left(y_i(x)+\xi_i\left(\frac{1+x}{2}\right)\right)\varepsilon^i+O(\varepsilon^{m+1})。\quad(0\leqslant x\leqslant 1,0<\varepsilon\ll 1)。$$

参 考 文 献

〔1〕R. E. O'Malley, Jr., Introduction to Singular erturbations. Academic Press, New York, 1974.

〔2〕R. E. O'Malley, Jr., on a boundary value problem for a nonlinear differential equation with a small parameter, SIAN J.Appl. Math., 17(1969), 569—581.

〔3〕F. W. Dorr, S. V. Parter and L. F. Shampine, Applications of the maximum principle to singular pertrbation problems, SIAM Rev., 15 (1973), 43—88.

〔4〕M. Nagumo, Über die Differentialgleichung y″=f(x, y, y′), Proc. Pheys. Math. Soc. Japan, 19 (1937), 861—866.

〔5〕L. K. Jackson, Subfunctions and second-order ordinary differential inequalities, Advances in Math., 2(1968), 307—363.

〔6〕莫嘉琪，关于非线性方程εy″=f(x, y, y′, ε)奇异摄动边值问题解的估计，数学年刊，5A (1984), 73—77.