

方阵在共轭转置变换下的对角化与同时对角化*

杨 安 洲

(北工大数学系)

定理 1. 复数方阵 A 在共轭转置变换下可对角化 $\Leftrightarrow$ 存在有正定的 Hermite 方阵 H ($\overline{H}' = H$) 使得 $AH\overline{A}' = \overline{A}'HA$. (共轭转置变换: $A \mapsto \overline{P}'AP$, $\det(P) \neq 0$)。

定理 2. $C = \{A_i : i \in I \text{ \& 所有的 } A_i \text{ 均为同阶数 } (n \times n) \text{ 的复数方阵}\}$ 在共轭转置变换下同时可对角化 $\Leftrightarrow$ 存在有正定的 Hermite 方阵 H 使得对于任意的 $i, j \in I$, $i \neq j$ 均有 $A_iHA_j = A_jHA_i$ 和 $A_iH\overline{A}_j' = \overline{A}_j'HA_i$ 。

定理 3. $C_1 = \{A_i : i \in I \text{ \& 所有的 } A_i \text{ 均为同阶数 Hermite 方阵}\}$ 在共轭转置变换下同时可对角化 $\Leftrightarrow$ 存在有正定的 Hermite 方阵 H 使得对于任意的 $i, j \in I$, $i \neq j$ 均有 $A_iHA_j = A_jHA_i$ 。

定理 4. $M = \{A_i : i \in I \text{ \& 所有的 } A_i \text{ 均为同阶的实对称方阵}\}$ 在实合同变换下同时可对角化 $\Leftrightarrow$ 存在有正定的实对称方阵 H 使得对于任意的 $i, j \in I$, $i \neq j$ 均有 $A_iHA_j = A_jHA_i$ (合同变换: $A \mapsto P'AP$, $\det(P) \neq 0$)。

* 1985年7月10日收到