拟线性正对称组具非线性特征的边值问题

林 正 国

（华东化工学院 数理系）

谷超豪在〔1〕中就报告了拟线性正对称方程组边值问题解的存在和唯一性定理，详细的证明发表于〔2〕,在〔7〕中对此有所改进，所建立的理论适用于非特征的齐次边值的情况。〔3〕参考了〔2〕,〔4〕的做法，把〔2〕的结果推广到拟线性正对称组具某类特征的边值问题中去，但要求边界条件仍是齐次的。本文讨论边界条件是非齐次的，且是非线性的特征边值问题，在这种情况下建立了可微解的存在和唯一性定理。

§1. 问题和结果

考虑如下的拟线性正对称方程组：

$$\sum_{i=1}^{n} A^i(x,\ u)\frac{\partial u}{\partial x^i}+au=f(x,\ u) \qquad \text{在}\Omega\text{中}, \tag{1.1}$$

这里$x^i(i=1,\ \cdots,\ n)$是自变量，u表示含N个分量的未知函数，$A^i(x,\ u)$是n个$N\times N$的对称矩阵，$A^i(x,\ u)$，$f(x,\ u)$充分光滑，Ω是R^n中的有界开集，边界$\partial\Omega$充分光滑，但允许有有良性角点[5]，a为充分大的正数，$f(x,\ u)$为某种意义下的充分小。此外,(1.1)还满足足以下的条件。

i）设$\{n_i\}$是边界$\partial\Omega$上的外法向，记$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n} n_iA^i$对于方程组(1.1)，称齐次边值条件件$M_u\big|_{\partial\Omega}=0$是合格的，即指满足$M_u\big|_{\partial\Omega}=0$的$u$关于$u\beta u$是最大的非负平面，由〔5〕知存在投影算子对$p$，使得若记$\beta_+=\beta p_+$，$\beta_-=\beta p_-$，则$M_u\big|_{\partial\Omega}=0$等价于$\beta_-u\big|_{\partial\Omega}=0$，相应于齐次形式的$\beta_-u\big|_{\partial\Omega}=0$也有非齐次形式的

$$-\beta_-u\big|_{\partial\Omega}=g(x,\ u)。\tag{1.2}$$

ii）以(1.2)代入(1.1)的左端系数，得到的方程组以$\partial\Omega\setminus B_-\cup B_+$[5]为非特征或亚亚正则特征[3]（所谓亚正则特征即$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n} n_iA^i(x,\ u)$在$\partial\Omega\setminus B_-\cup B_+$上的秩保持不变。）（讨论限于$|u-u_0|<r$中，$r$为某一充分小的正数。为简单计设$u_0=0$）。

iii）在$\partial\Omega$附近，存在一个光滑的可逆变换$u=S(x)w$对问题(1.1)(1.2)作变换$u=S(x)w$后，得到的$\widetilde{\beta}(x,\ w)=\sum\limits_{i=1}^{n} n_i\widetilde{A}^i(x,\ w)$能写成分块矩阵的形式$\begin{pmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{pmatrix}$，在边界上考虑$\begin{pmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{pmatrix}$，且以(1.2)代入，则$B_1$为满秩阵，$B_2$为零阵。若变换为非线性的$u=S(w)$，但仍有以上的形式。

Ⅳ）在角点处，满足$p-1$阶相容性条件。（这里$p\geqslant 8m+8$，$m=\left[\frac{n}{2}\right]+2$）[4]仿[2]取完备的切边算子系。

$$D_a=d_a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (a=1,\ \cdots,\ M_0), \qquad D_0=aI\ (I\text{为单位阵})。\tag{1.3}$$

* 1982年8月11日收到。

(1.4)　　记 $|u|_S$ 为 u 在 $C^S(\overline{\Omega})$ 空间中的范数。

$D_q^p u$ 为 u 的 p 次广义导数，其中含 q 次非切边导数。$\widetilde{H}_t^s(\Omega)$ 表示满足条件 $D_q^p u \in L^2(\Omega)$ $(p \leqslant s, g \leqslant t)$ 的函数 u 的集合，易知 $\widetilde{H}_t^s$ 是Hilbert空间，特别当 $t=0$，记 $\widetilde{H}_o^s$ 为 $\widetilde{H}^s$，有

(1.5)
$$\|u\|_{\widetilde{H}^s}=\left\{\int_\Omega \sum_{\sigma_1\cdots\sigma_s=0,\cdots,M_0}(D_{\sigma_1}\cdots D_{\sigma_s}u)^2 dv\right\}^{\frac{1}{2}}$$ 。

当 $t=s$ 时，记 $\widetilde{H}_s^s$ 为 $\widetilde{H}_s$，则此时有

(1.6)
$$\|u\|_{\widetilde{H}_s}=\left\{\int_\Omega \sum_{\sigma_1\cdots\sigma_s=0,\cdots n}(\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_s}u)^2 dv\right\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(i=1,\cdots,n)$ $\partial_0=aI$ 。

特别当 $a=1$，则 $\widetilde{H}_s=H_s$，即为通常的Sobolev空间。$\widetilde{H}_p(\partial\Omega)$ 为边界 $\partial\Omega$ 上的相应函数空间。函数空间 $B_p(\Omega)$ 定义为：$B_p(\Omega)=\bigcap\limits_{\delta\leqslant[\frac{p}{2}]}\widetilde{H}_\delta^{p-\delta}(\Omega)$，它的范数，$\|\cdot\|_{B_p}=\left(\sum\limits_{\delta\leqslant[\frac{p}{2}]}\|\cdot\|^2_{\widetilde{H}_\delta^{p-\delta}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 。

函数集合 $\mathscr{B}_P(\mu)=B_P(\Omega)\times\widetilde{H}_P(2\Omega)$，$\|u\|_{\mathscr{B}_p(\mu)}=\|u\|_{B_p}+\|\overline{u}\|_{\widetilde{H}_p(2\Omega)}$，$\overline{u}$ 为 u 在边界上的投影，且若 $u\in\mathscr{B}_p(\mu)$，则（i）$\|u\|_{\mathscr{B}_p(\mu)}\leqslant\mu$（$\mu$ 为某个充分小的正常数），(ii) $\partial^k u|_{B_-}=0$ $(k\leqslant p-1)$，(iii) u 为充分光滑的。

这时，我们就有本文的主要结果

定理 1　问题（1.1)(1.2）若满足条件（i）-(iv)，则存在唯一的解 $u\in C^s$，s 的大小与 p 有关。

§2 定理的证明

对（1.1)(1.2）引入辅助的线性问题：

(2.1)
$$\sum_{i=1}^n A^i(x, u)\frac{\partial U}{\partial x^i}+aU=f(x, u),\qquad \text{在}\Omega\text{中}$$

(2.2)
$$-\beta\_U|_{\partial\Omega}=g(x, u)$$ 。

若问题（2.1)(2.2）有解，则把从已知的 $u\to U$ 的过程记为 $Tu=U$，T 的不动点即是问题（1.1)(1.2）的解，由〔6〕知问题（2.1)(2.2）解的存在性。

采用单位分解，局部化的技巧，在 Ω 上作有穷开复盖 $\{\Omega_a\}$，并作从属于 $\{\Omega_a\}$ 的单位分解，$\Sigma\eta_a=1$，$\eta_a\in C^\infty$，$\operatorname{supp}\eta_a=\Omega_a$，令 $U_a=\eta_a U$，则 $U=\Sigma U_a$。从（2.1）可得：

(2.3)
$$\sum_{i=1}^n A^i(x, u)\frac{\partial U_a}{\partial x^i}+aU_a=\sum_{i=1}^n A^i(x, u)\frac{\partial\eta_a}{\partial x^i}U+\eta_a f(x, u)$$ 。

把 $\{\Omega_a\}$ 分为边区和内区，仅讨论边区的情况即可。对于边区，若一部份边界是属于 B_- 的，则关于它作零延拓，若一部份边界属于 B_+，则关于它作光滑延拓，即可化为如下讨论的情况或是内部区域的情况。这时，边界条件为

(2.4)
$$-\beta\_U_a|_{\partial\Omega_a\cap\partial\Omega}=\eta_a g(x, u)$$ 。

对（2.3）作用 p 阶的切边算子 $D^p=D_{\sigma_1}\cdots D_{\sigma_p}$，然后进行能量估计，仿照〔2〕,〔4〕,

〔6〕的方法，不难得到

$$(2.5)\qquad a\|U_a\|_{\widetilde{H}^p(\Omega)}+\|U_a\|_{\widetilde{H}_p(\partial\Omega_a\cap\partial\Omega)}\leqslant C(\|U\|_{B_p(\Omega)}+\|f\|_{B_p(\Omega)}+\|g\|_{\widetilde{H}_p(\partial\Omega_a\cap\partial\Omega)}),$$

这里C是与a，u均无关的常数，简记$\partial\Omega_a\cap\partial\Omega=D_a$。令

$$(2.6)\qquad \|U\|_{B_p(\Omega)}+\|f\|_{B_p(\Omega)}+\|g\|_{\widetilde{H}_p(D_a)}=Q\quad,$$

对于边界区域Ω_a，不妨设可作一局部的坐标变换，$(x^1,\cdots,x^n)\to(y^1,\cdots,y^n)$，使$D_a$展平为为$y^n=0$，故$y^n$为法向，取$\frac{\partial y_n}{\partial x^i}=n_i$，则有

$$(2.7)\qquad \sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{A}^i(y,u)\frac{\partial U_a}{\partial y^i}+\widetilde{\beta}\frac{\partial U_a}{\partial y^i}+aU_a=a_1U+\eta_a f(x,u),$$

其中a_1，$\widetilde{A}^i$，$\widetilde{\beta}$都可由（2.3）和变换函数$\{x^i\}\to\{y^i\}$中求得，简记$\eta_a f(x,u)=f_a$。

由假设（iii）知，作变换$U_a=Sw$ 可得

$$(2.8)\qquad \sum_{j=1}^{n-1}a_j(y,w)\frac{\partial w}{\partial y^a}+\beta\frac{\partial w}{\partial y^n}+aS^JSw=a_2U+f_a\text{。}$$

如（iii）中所述，$\beta=\begin{pmatrix}B_1&\\&B_2\end{pmatrix}$，依$\beta$的形式，把（2.8）分为两组：

$$(2.9)\qquad \sum_{j=1}^{n-1}a_j^1\frac{\partial w}{\partial y^j}+B_1\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y^n}+aH^1w=(a_2U+f_a)^{(1)},$$

$$(2.10)\qquad \sum_{j=1}^{n=1}a_j^2\frac{\partial w}{\partial y^j}+B_2\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y^n}+aH^2w=(a_2U+f_a)^{(2)}\text{。}\qquad(2.10)$$

从（2.5）得$a\|w^{(1)}\|_{\widetilde{H}^p(\Omega_a)}+\|\overline{U}_a\|_{\widetilde{H}_p(D_a)}\leqslant CQ$，$a\|w^{(2)}\|_{\widetilde{H}^p(\Omega_a)}+\|\overline{U}_a\|_{\widetilde{H}_p(D_a)}\leqslant CQ$，这里

$$a_j=\begin{pmatrix}a_j^1\\a_j^2\end{pmatrix},\qquad aS^TS=a\begin{pmatrix}H^1\\H^2\end{pmatrix},\qquad w=\begin{pmatrix}w^{(1)}\\w^{(2)}\end{pmatrix},$$

以下将有：$$\begin{pmatrix}a_j^1\\a_j^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_j^{11}&a_j^{12}\\a_j^{21}&a_j^{22}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}H^1\\H^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H^{11}&H^{12}\\H^{21}&H^{22}\end{pmatrix},$$

从（2.9）可以解得

$$(2.11)\qquad \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y^n}=B_1^{-1}\Big[(a_2U+f_a)^{(1)}-aH^{11}w^{(1)}-aH^{12}w^{(2)}-\sum_{z=1}^{n-1}\Big(a_z^{11}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y^j}+a_j^{12}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y^j}\Big)\Big]\text{。}$$

估计上式右边的$\widetilde{H}^{p-1}$范数：

$$(2.12)\qquad \Big\|\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y^n}\Big\|_{\widetilde{H}^{p-1}}\leqslant C\Big[\frac{1}{a}\|U\|_{B_p}+\frac{1}{a}\|f\|_{B_p}+\|w^{(1)}\|_{\widetilde{H}^p}+\|w^{(2)}\|_{\widetilde{H}^p}\Big]\text{。}$$

在（2.12）式两边乘以a，加上$\|U_a\|_{\widetilde{H}_p(D_a)}$可得

$$(2.13)\qquad a\|w^{(1)}\|_{\widetilde{H}_1^p}+\|\overline{U}_a\|_{\widetilde{H}_p(D_a)}\leqslant CQ\text{。}$$

对（2.10）式用$\frac{\partial}{\partial y^n}$，可得

$$(2.14)\qquad \sum_{j=1}^{n-1}a_j^{22}\frac{\partial w_n^{(2)}}{\partial y^j}+B_2\frac{\partial w_n^{(2)}}{\partial y^n}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^n}(a_2 U + f_a)^{(2)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial a_j^2}{\partial y^n} \frac{\partial w}{\partial y^j} - \frac{\partial B_2}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y^n} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{21} \frac{\partial w_n^{(1)}}{\partial y^j} \quad ,$$

这里$w_n^{(1)} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y^n}$，$w_n^{(2)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y^n}$。

因为B_2在$y^n = 0$上为零阵，对（2.14）进行能量积分得：$a\|w_n^{(2)}\|_{\tilde{H}^{p-2}} + \|\overline{U}_a\|_{\tilde{H}_p(D_a)} \leqslant CQ$，即

$$(2.15) \qquad a\|w^{(2)}\|_{\tilde{H}_1^{p-2}} + \|\overline{U}_a\|_{\tilde{H}_p(D_a)} \leqslant CQ \quad 。$$

以（2.13),(2.15）的结果代入（2.12)，不难得到$a\|w^{(1)}\|_{\tilde{H}_2^{p-1}} + \|\overline{U}_a\|_{\tilde{H}_p(D_a)} \leqslant CQ$，继而又得：$a\|w^{(2)}\|_{\tilde{H}_2^{p-2}} + \|\overline{U}_a\|_{\tilde{H}_p(D_a)} \leqslant CQ$，……。这样，最后可得$a\|w\|_{B_p} + \|U_a\|_{\tilde{H}_p(D_a)}$ 即

$$(2.16) \qquad a\|U_a\|_{B_p} + \|\overline{U}_a\|_{\tilde{H}_p(D_a)} \leqslant CQ 。$$

关于指标a求和，可得$a\|U\|_{B_p} + \|\overline{U}\|_{\tilde{H}_p(\partial\Omega)} \leqslant C(\|U\|_{B_p} + \|f\|_{B_p} + \|g\|_{\tilde{H}_p(\partial\Omega)})$，取$a$充分大后，有

$$\|U\|_{B_p} + \|\overline{U}\|_{\tilde{H}_p(\partial\Omega)} \leqslant C(\|f\|_{B_p} + \|g\|_{\tilde{H}_p(\partial\Omega)}) \quad 。$$

若设f，g为$\|f\|_{B_p}$，$\|g\|_{\tilde{H}_p(\partial\Omega)}$意义下的充分小，则有

$$(2.17) \qquad \|U\|_{\mathscr{B}_p} \leqslant \mu \quad ,$$

因此，得

引理：对于方程组（2.1)(2.2)，当条件（i）-（iv）被满足时，$\forall u \in \mathscr{B}_p(\mu)$，只要$a$充分大，就有解$U$存在，且

$$\|u\|_{\mathscr{B}_p} \leqslant \mu \quad 。$$

由以上的分析，可以证明：$T_u = U$中的T是实现了$\overline{\mathscr{B}} \to \overline{\mathscr{B}}$的内照，（$\overline{\mathscr{B}}$即是$\mathscr{B}_p(\mu)$按$\mathscr{B}_p$范数取的闭包。）

事实上，$\forall u \in \overline{\mathscr{B}}$，有$\{u_n, \overline{u}_n\} \in \mathscr{B}_p(\mu)$，使$\|\{u_n, \overline{u}_n\} - \{u, \overline{u}\}\|_{\mathscr{B}_p} \to 0$，记$T\{u_n, \overline{u}_n\} = \{U_n, \overline{U}_n\}$，令$\{V, \overline{V}\} = \{U_{n_1}, \overline{U}_{n_1}\} - \{U_{n_2}, \overline{U}_{n_2}\}$，它满足方程组

$$(2.18) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A^i(x, u_{n_1}) \frac{\partial V}{\partial x^i} + aV = [f(x, u_{n_1}) - f(x, u_{n_2})] - \sum_{i=1}^{n} [A^i(x, u_{n_1}) - A^i(x, u_{n_2})] \frac{\partial U_{n_2}}{\partial x^i} , \\ -\beta\_V = g(x, u_{n_1}) - g(x, u_{n_2}) \quad 。 \end{cases}$$

仿照证明引理的做法，经仔细估计后，可得

$$\|V\|_{B_{p-2}} + \|\overline{V}\|_{\tilde{H}_{p-2}(\partial\Omega)} \leqslant q\ \|u_{n_2} - u_{n_1}\|_{B_{p-2}} + \|\overline{u}_{n_2} - \overline{u}_{n_1}\|_{\tilde{H}_{p-2}(\partial\Omega)} \quad 。$$

当a充分大，$\|f\|_{B_p}$，$\|g\|_{\tilde{H}_p(\partial\Omega)}$充分小，就有$q > 1$。故$\|\{V, \overline{V}\}\|_{\mathscr{B}_{p-2}} \leqslant g\|\{u_{n_2} - u_{n_1}, \overline{u}_{n_2} - \overline{u}_{n_1}^{n_1}\}\|_{\mathscr{B}_{p-2}}$。这样，$T$按$\mathscr{B}_{p-2}$范数来说是一个压缩算子，从而$\{U_n, \overline{U}_n\}$按$\mathscr{B}_{p-2}$范数是一个收敛序列，极限为$U$，但因$\|\{U_n, \overline{U}_n\}\|_{\mathscr{B}_p}$一致有界，故由Banach-Saks定理知$\{U, \overline{U}\} \in \overline{\mathscr{B}}$，$\therefore T$是$\overline{\mathscr{B}} \to \overline{\mathscr{B}}$的内照。

我们从$\{u_0, \overline{u_0}\} \in \overline{\mathscr{B}}$出发，作

$$(2.19) \qquad \{u_{n+1}, \overline{u}_{n+1}\} = T\{u_n, \overline{u}_n\} \quad ,$$

则 $\|\{u_n, \overline{u_n}\}\|_{\mathscr{B}_r}$一致有界，由 T 依 $\mathscr{B}_{p\pm2}$ 范数的压缩性可知：按 $\mathscr{B}_{p\pm2}$ 范数，有 $\{u_n, \overline{u_n}\}\to\{u, \overline{u}\}$。故在（2.19）式两边取极限即得

$$\{u, \overline{u}\}=T\{u, \overline{u}\} \tag{2.20}$$

就此得到了问题（1.1)(1.2）解的存在性定理，解 u 的 B_{p-2} 范数有界，故 $u\in\widetilde{H}_{4m+3}\subset H_{4m+3}\subset C_{3m+3}$。

解的唯一性可按常规方式得到，在此从略。

参 考 文 献

〔1〕谷超豪，复旦大学数学研究所，数学论文集（1964),pp42—58。

〔2〕谷超豪，数学学报，21卷2期（1978),pp119—129。

〔3〕林正国，拟线性正对称组的特征边值问题（复旦大学研究生毕业论文）。

〔4〕陈恕行，数学年刊，3(2)(1982),pp223—232。

〔5〕K.O.Friedrichs, Comm.Pure Appl. Math.Vll（1958),pp333—418。

〔6〕李得宁、孙龙祥，复旦学报，V21，2(1982)，157。

〔7〕Gu Chaohao, On partial differential equations of mixed type in n independent variables, Comm. Pure Appl.Math., 34(1981), p333—345。

The Boundary Problem for Quasilinear Symmetric Positive Systems with Nonlinear Characteristic

Lin Zhenguo

(East China Institute of Chemical Technology)

Abstract

In this paper we generalized the result of Professor Gu Chaohao in〔1〕,〔2〕〔7〕, Set up the differentiable soluton existence and uniqueness theorem of the the boundary problem for quaslilinear symmetric positive system with nonlinear characteristic。