Semiamart 与 Gaft 类的收敛性

汪　振　鹏

（华东师范大学数学系）

§1　引　　言

设（Ω，$\mathscr{F}$，P）是一概率空间，$\mathrm{N}=\{1,2,\cdots\}$，$(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathrm{N}}$是$\mathscr{F}$的上升子$\sigma$-代数序列，设$(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$是（实值）随机变量序列，若对每一个$n\in\mathrm{N}$，$x_n$为$\mathscr{F}_n$可测且$E|x_n|<\infty$，则称$(x_n,\mathscr{F}_n)_{n\in\mathrm{N}}$是适应可积序列，在不致引起混淆的场合常省去$n\in\mathrm{N}$的记号而简记成$(x_n,\mathscr{F}_n)$。设$(x_n,\mathscr{F}_n)$是适应可积序列，若对任意的$\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n}\sup\limits_{m\geqslant n}P\{|E(x_m|\mathscr{F}_n)-x_n|>\varepsilon\}=0$，Blake, L. H. 称$(x_n,\mathscr{F}_n)$是Game fairer with time[1]（下面简记为Gaft）。若$(x_n,\mathscr{F}_n)$是一致可积的Gaft，则x_n依概率（且L^1）收敛[7][8]，进一步若$(x_n,\mathscr{F}_n)$是一致可积适应序列，则（1）x_n依概率收敛与（2）$(x_n,\mathscr{F}_n)$是Gaft两者为等价[7]，Mucci, A. G. 还指出，如果没有一致可积条件，则两者不能互推（原文为"In the absence of uniform integrability we have neither implication."，见〔7〕的P. 200的Remarks.），但是这句话是欠妥的，本文的讨论表明在没有一致可积性的另外二个条件下，两者也是可以互推的。

Ⅱ. 渐进一致可积性与 Gaft 的收敛性

定义1. 设$(x_n,\mathscr{F}_n)$是适应可积序列，若存在上升的集合序列(A_n)满足（1）$\mathrm{A}_n\in\mathscr{F}_n$，$n\in N$，（2）$\bigcup\limits_n \mathrm{A}_n=\Omega$，使对任一固定的$k\in\mathrm{N}$，$(x_nI_{\mathrm{A}_k})_{n\geqslant k}$为一致可积，则称$(x_n,\mathscr{F}_n)$是渐进一致可积的适应序列。

定理1. 设$(x_n,\mathscr{F}_n)$是渐进一致可积适应序列，则

（1）x_n依概率收敛，　（2）$(x_n,\mathscr{F}_n)$是Gaft

两者为等价。

证明：（1）⇒（2）设$(x_n,\mathscr{F}_n)$关於(A_n)渐进一致可积，对任意的$\varepsilon>0,\delta>0$，必可选取k使得$P(\mathrm{A}_k)>1-\frac{\delta}{2}$，这时$x_nI_{\mathrm{A}_k}$仍依概率收敛且一致可积，所以$(x_nI_{\mathrm{A}_k},\mathscr{F}_n)_{n\geqslant k}$是Gaft，必存在$n_0\geqslant k$，使当$m\geqslant n\geqslant n_0$时有

$$P\{|E(x_mI_{\mathrm{A}_k}|\mathscr{F}_n)-x_nI_{\mathrm{A}_k}|>\varepsilon\}<\frac{\delta}{2},$$

这时有

$P\{|E(x_m|\mathscr{F}_n)-x_n|>\varepsilon\}\leqslant P\{|E(x_mI_{\mathrm{A}_k}|\mathscr{F}_n)-x_nI_{\mathrm{A}_k}|>\varepsilon\}+P(\overline{\mathrm{A}}_k)<\delta$，由$\varepsilon$、$\delta$的任意性知$(x_n,\mathscr{F}_n)$是Gaft.

（2）⇒（1）因为$(x_n,\mathscr{F}_n)$是Gaft，所以对任意的$k\in\mathrm{N}$，$(x_nI_{\mathrm{A}_k},\mathscr{F}_n)_{n\geqslant k}$是Gaft，而

* 1983年12月22日收到。

$(x_n I_{A_k})_{n\geqslant k}$ 一致可积，故 $x_n I_{A_k}$ 依概率收敛，由K的任意性知 x_n依概率收敛。定理证毕。

渐近一致可积性弱於一致可积性，下面是一个具有渐进一致可积性但不一致可积的适应可积序列的例子。

例 1：设$\Omega=[0,1)$，$\mathscr{F}$ 和 P 分别为其上的勒贝格可测集全体和勒贝格测度。对$k\in\mathbf{N}$，

$\mathscr{Y}_k=\mathscr{B}\{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k}),1\leqslant j\leqslant 2^k\}$，令$x_1=2I_{[0,\frac{1}{2})}+I_{[0,\frac{1}{2})}$，$x_2=2I_{[0,\frac{1}{2})}+I_{[\frac{1}{2},1)}$，

$\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\mathscr{Y}_1$，若$n>3$，则存在唯一的 $k\in\mathbf{N}$，使有$\sum\limits_{i=1}^{k-1}2^i<n\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}2^i$，记$j=n-\sum\limits_{i=1}^{k-1}2^i$，$1\leqslant j\leqslant 2^k$，

令$x_n=2^k I_{[0,\frac{1}{2^k})}+I_{[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}$，$\mathscr{F}_n=\mathscr{Y}_k$，这时$(x_n,\mathscr{F}_n)$是适应可积序列，且 $x_n\to 0\,(Pr.)$，但(x_n)并不一致可积，而渐近一致可积性是显然的。

Ⅲ. Semiamart 与 Gaft 的收敛性

记 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 $(\mathscr{F}_n)$ 的有界停时全体为T，对任意的 $\sigma\in T$，$T(\sigma)=\{\tau:\tau\in T,\tau\geqslant\sigma\}$。一个适应可积序列 $(x_n,\mathscr{F}_n)$，若有 $\sup\limits_{\tau\in T}|Ex_\tau|<\infty$，则称 $(x_n,\mathscr{F}_n)$ 是一个 Semiamart [1]。

定义2. 设 $(x_n,\mathscr{F}_n)$ 是适应可积序列，若有 $\sup\limits_{\tau\in T}[Ex_\tau]^{+(-)}<\infty$，则称 $(x_n,\mathscr{F}_n)$是上（下）Semiamart .

定义 3：设 $(x_n,\mathscr{F}_n)$ 是适应可积序列，若对任意的$\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_n\sup\limits_{m\geqslant n}P\{[E(x_m|\mathscr{F}_n)-x_n]^{+(-)}>\varepsilon\}=0$，则称 $(x_n,\mathscr{F}_n)$是上（下）Gaft .

显然，上（下）Semiamart 和上（下）Gaft 分别是 Semiamart 和Gaft的自然推广，也是上（下）鞅的推广。

引理2. 设 $(x_n,\mathscr{F}_n)$是上 Semiamart，则有分解式$x_n=y_n+z_n$，$\forall n\geqslant 1$，其中 $(y_n,\mathscr{F}_n)$ 是上鞅，$z_n\leqslant 0$，且$\overline{\lim\limits_\tau}Ez_\tau=0$，$\overline{\lim\limits_n}z_n=0\,(a.e.)$.

证明：因为 $(x_n,\mathscr{F}_n)$是上 Semiamart，故 $\sup\limits_{\tau\in T}[Ex_\tau]^-<\infty$，对任意的 $\sigma\in T$，

令 $y_\sigma=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\tau\in T(\sigma)}E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)$

由ess sup 性质知存在 $(\tau_n)\subset T(\sigma)$，使有$y_\sigma=\sup\limits_n E(x_{\tau_n}|\mathscr{F}_\sigma)$，且不妨设 $E(x_{\tau_n}|\mathscr{F}_\sigma)\uparrow(n\uparrow)$，不然，令 $\tau_1'=\tau_1$，若 τ_n' $(n\geqslant 1)$已取定，再令

$$\tau_{n+1}'=\begin{cases}\tau_n', & \omega\in\{E(x_{\tau_n'}|\mathscr{F}_\sigma)\geqslant E(x_{\tau_{n+1}}|\mathscr{F}_\sigma)\}\\ \tau_{n+1}, & \omega\in\{E(x_{\tau_n'}|\mathscr{F}_\sigma)<E(x_{\sigma_{n+1}}|\mathscr{F}_\sigma)\},\end{cases}$$

并以 (τ_n')代替 (τ_n)即可。由 Levi 引理有

$$-\infty<Ex_\sigma\leqslant Ey_\sigma=E[\lim\limits_n E(x_{\tau_n}|\mathscr{F}_\sigma)]=\lim E[E(x_{\tau_n}|\mathscr{F}_\sigma)]\leqslant\sup\limits_{\tau\in T}(Ex_\tau)^+<\infty,$$

故 $(y_n,\mathscr{F}_n)$是适应可积序列，且对任意的 $m,n\in\mathbf{N}$，若$m>n$，由条件期望的单调收敛定理有

$$E(y_m|\mathscr{F}_n)=E[\lim\limits_k E(x_{\tau_k}|\mathscr{F}_m)|\mathscr{F}_n]=\lim\limits_k E(x_{\tau_k}|\mathscr{F}_n)\leqslant\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\tau\in T(n)}E(x_\tau|\mathscr{F}_n)=y_n,$$

故 $(y_n,\mathscr{F}_n)$是上鞅，令$z_n=x_n-y_n$，则 $z_n\leqslant 0$ 为显然，又因为 $\sup\limits_{\tau\in T}(Ex_\tau)^-<\infty$，所以$\overline{\lim\limits_T}Ex_\tau<\infty$，从而对任意的$\varepsilon>0$，$n\in\mathbf{N}$，必存在$\sigma\in T(n)$，使有 $Ex_\sigma\geqslant\overline{\lim\limits_T}Ex_\tau-\varepsilon$，这时有

$$0\geqslant\sup\limits_{\tau\in T(n)}Ez_\tau\geqslant Ex_\sigma-Ey_\sigma=Ex_\sigma-E[\lim\limits_m E(x_{\tau_m}|\mathscr{F}_\sigma)]\geqslant\overline{\lim\limits_T}Ex_\tau-\varepsilon-\sup\limits_{\tau\in T(\sigma)}Ex_\tau$$

由 n 的任意性知有 $0\geqslant\overline{\lim\limits_T}Ez_\tau\geqslant-\varepsilon$ 成立，再由 ε 的任意性即得 $\overline{\lim\limits_T}Ez_\tau=0$，由推广的 Fatau 引理（见〔3〕的命题4.2）还有 $\overline{\lim\limits_n}z_n=0\,(a.e.)$，引理证毕。

引理3. 设 $(x_n,\mathscr{F}_n)$、$(y_n,\mathscr{F}_n)$ 都是上 Gaft，则 $(x_n\wedge y_n,\mathscr{F}_n)$ 也是上 Gaft．

证明： 由不等式

$E(x_m\wedge y_m|\mathscr{F}_n)-x_n\wedge y_n=I_{(x_n<y_n)}[E(x_m|\mathscr{F}_n)-x_n]+I_{(x_n\geqslant y_n)}[E(y_m|\mathscr{F}_n)-y_n]$立得。

设 (x_n) 是随机变量序列，$\mathrm{s}\overline{\lim_n}\,x_n$ 表示满足 $\lim_n P\{(y<x_n)\}=0$ 的随机变量族的本性下确界。又 $\mathrm{s}\underline{\lim_n}\,x_n=-\mathrm{s}\overline{\lim_n}(-x_n)$。如果 $\mathrm{s}\underline{\lim_n}\,x_n=\mathrm{s}\overline{\lim_n}\,x_n=x_\infty$，则 $x_n\to x_\infty\,(pr)$[5][6]。

引理4. 设 $(x_n,\mathscr{F}_n)$ 是非负的上 Gaft，则 x_n 依概率收敛。

证明： 令 $A=\{\mathrm{s}\underline{\lim_n}\,x_n=\infty\}$，必有 $P(A)=0$，若结论不真，则存在 ε 使有 $0<\varepsilon<\frac{P(A)}{2}$，由上 Gaft 的定义知存在 $n\in\mathbf{N}$，使得 $P(\{[E(x_{n+k}|\mathscr{F}_n)-x_n]^+>\varepsilon\})<\frac{\varepsilon}{2}$ 对所有的 $k\in\mathbf{N}$ 都成立，对选定的 n，因为 $Ex_n<\infty$，可选取 b 足够大，使有 $P(x_n>b)<\frac{\varepsilon}{2}$，记

$$B_k^n=\{([E(x_{n+k}|\mathscr{F}_n)-x_n]^+>\varepsilon)\cup(x_n>b)\},$$

则对任意的 $k\in\mathbf{N}$，$P(B_k^n)<\varepsilon$。又由 A 的定义知对任意大的 M，可选取 k 使得 $P\{(x_{n+k}>M)\}>P(A)-\varepsilon$，又

$$MI_{\overline{B_k^n}}E(I_{(x_{n+k}\geqslant M)}|\mathscr{F}_n)\leqslant I_{\overline{B_k^n}}E(x_{n+k}|\mathscr{F}_n)\leqslant b+\varepsilon,$$

因为 $B_k^n\in\mathscr{F}_n$，对上述不等式两边取期望即得

$$MP\{\overline{B_k^n}\cap(x_{n+k}\geqslant M)\}\leqslant b+\varepsilon,$$

而 $P(x_{n+k}\geqslant M)\leqslant P\{\overline{B_k^n}\cap(x_{n+k}\geqslant M)\}+P(B_k^n)$，且 $P(B_k^n)<\varepsilon$，故

$$P\{\overline{B_k^n}\cap(x_{n+k}\geqslant M)\}\geqslant P\{x_{n+k}\geqslant M\}-\varepsilon>P(A)-2\varepsilon,$$

於是有 $M[P(A)-2\varepsilon]\leqslant b+\varepsilon$ 成立，由 M 的任意性即引出矛盾，所以假设不能成立，$P(A)=0$。再证明 x_n 依概率收敛，反证之，若结论不成立，则存在实数 $a<b$，使有

$$P\{\mathrm{s}\underline{\lim_n}\,x_n<a<b<\mathrm{s}\overline{\lim_n}\,x_n\}=\delta>0\quad。$$

但

$$\{\mathrm{s}\underline{\lim_n}(x_n\wedge b)<a<b=\mathrm{s}\overline{\lim_n}(x_n\wedge b)\}\supset\{\mathrm{s}\underline{\lim_n}\,x_n<a<b<\mathrm{s}\overline{\lim_n}\,x_n\},$$

从而 $P\{\mathrm{s}\underline{\lim_n}(x_n\wedge b)<a<b)=\mathrm{s}\overline{\lim_n}(x_n\wedge b)\}>\delta>0$，所以 $x_n\wedge b$ 不依概率收敛，但由引理 3 知 $(x_n\wedge b,\mathscr{F}_n)$ 仍是上 Gaft，且 $0\geqslant x_n\wedge b\leqslant b$，因而易於验证有 $\int[E(x_m\wedge b|\mathscr{F}_n)-x_n\wedge b]^+\to 0$，所以 $x_n\wedge b$ 依概率（且L^1）收敛（见〔9〕的定理 5），矛盾，故假设不能成立，定理证毕。

定理 5． 设 $(x_n,\mathscr{F}_n)$ 是 L^1 有界的上 Semiamart，若 $(x_n,\mathscr{F}_n)$ 是下Gaft，则 x_n 依概率收敛。

证明： 由引理 2 知 (x_n) 有分解式：$x_n=y_n+z_n$，$n\in\mathbf{N}$，因为 $x_n\leqslant y_n$，故 $\sup_n Ey_n^-\leqslant\sup_n Ex_n^-<\infty$，由上鞅收敛性知 $y_n\,a.e.$ 收敛於可积随机变量，且因为 $(Ey_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 有界，这时 $(y_n,\mathscr{F}_n)$ 必是 Amart[2]，当然是 Gaft，从而 $z_n=x_n-y_n$ 仍是下 Gaft，由引理 4 知 z_n 依概率收敛，所以 x_n 依概率收敛，定理得证。

定理6. 设 $(x_n,\mathscr{F}_n)$ 是 L^1 有界上 Semiamart，若 x_n 依概率收敛，则 $(x_n,\mathscr{F}_n)$ 是上 Gaft。

证明： (x_n) 有分解式 $x_n=y_n+z_n$，$n\in\mathbf{N}$，$(y_n,\mathscr{F}_n)$ 是上鞅，$z_n\leqslant 0$，$\overline{\lim_T}Ez_\tau=0$，$\overline{\lim_n}z_n=0\,(a.e.)$。因为 $(x_n)\,L^1$ 有界，故 (y_n)、(z_n) 也L^1 有界，这时 $z_n=x_n-y_n$ 仍依概率收敛。因为 $M=\sup_n E|z_n|<\infty$，对任意的 $\varepsilon>0,\delta>0$，令 $b\,(>0)$ 充分大，使 $\frac{M}{b}<\frac{\delta}{2}$。因为 z_n

依概率收敛，所以 $z_n \vee(-b)$ 也依概率收敛，又 $(z_n \vee(-b))$ 一致可积，所以 $(y_n \vee(-b),$ $_n)$ 必是 Gaft，因而存在 $k \in \mathbf{N}$，使当 $n \geqslant k$ 时有

$$\sup_{m \geqslant n} P\{|E(z_m \vee(-b) | \mathscr{F}_n) - z_n \vee(-b)| > \frac{\varepsilon}{2}\} < \frac{\delta}{2},$$

但 $E(z_m | \mathscr{F}_n) - z_n = E(z_m \vee(-b) | \mathscr{F}_n) - y_n \vee(-b) + E[(z_m+b) I_{(z_m<-b)} | \mathscr{F}_n] - (z_n+b)$ $I_{(z_n<-b)}$，又因为 $(z_m+b) I_{(z_m<b)} \leqslant 0$，$(z_n+b) I_{(z_n<-b)} \leqslant 0$，所以有

$$P\{(E[(z_m+b) I_{(z_m<-b)} | \mathscr{F}_n] - (z_n+b) I_{(z_n<-b)})^+ > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$\leqslant P\{-(z_n+b) I_{(z_n<-b)} > \frac{\varepsilon}{2}\} < P\{z_n < -b\} \leqslant \frac{M}{b} < \frac{\delta}{2},$$

於是当 $n \geqslant k$ 时有

$$P\{[E(z_m | \mathscr{F}_n) - z_n]^+ > \varepsilon\} < P\{|E(z_m \vee(-b) | \mathscr{F}_n) - z_n \vee(-b)| > \frac{\varepsilon}{2}\} + P\{(E[(z_m+b) I_{(z_m<-b)} | \mathscr{F}_n] - (z_n+b) I_{(z_n<-b)})^+ > \frac{\varepsilon}{2}\} \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

由ε、δ的任意性知 $(z_n, \mathscr{F}_n)$ 是上 Gaft，$(y_n, \mathscr{F}_n)$ 是上鞅，必是上 Gaft，从而 $(x_n, \mathscr{F}_n)$ 也是上 Gaft，定理得证。

定理7. 设 $(x_n, \mathscr{F}_n)$ 是 L^1 有界 Semiamart，则

（1）x_n 依概率收敛，　（2）$(x_n, \mathscr{F}_n)$ 是 Gaft

两者为等价。

证明： 由定理5.6即得。

上述定理表明在 $(x_n, \mathscr{F}_n)$ 是 L^1 有界 Semiamart 的条件下，（1）x_n 依概率收敛与（2）$(x_n, \mathscr{F}_n$ 是 Gaft 两者是等价的，现在还要说明 L^1 有界 Semiamart 确是与一致可积不同的一种条件。首先，由 L^1 有界 Semiamart 不能推出一致可积性，这只要注意到 L^1 有界鞅（这时 Ex_τ = 常数）并不一定是封闭鞅的事实就清楚了，下述例子则表明一致可积（且依概率收敛）的适应序列不一定是 L^1 有界的 Semiamart。

例2. 令 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，$(\mathscr{Y}_k)$ 如同例1，令

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{(0, \frac{1}{2})} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{[\frac{1}{2}, 1)}, \qquad \mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \mathscr{Y}_1,$$

对任意的 $n \geqslant 3$，必存在唯一的 $k \in \mathbf{N}$，使有 $\sum_{i=1}^{k-1} 2^i < n \leqslant \sum_{i=1}^{k} 2^i$，记 $j = n - \sum_{i=1}^{k-1} 2^i$，$1 \leqslant j \leqslant 2^k$，令 $x_n = 2^{k/2} I_{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})}$，$\mathscr{F}_n = \mathscr{Y}_k$，则 $(x_n, \mathscr{F}_n)$ 是适应可积序列，且 $x_n \to 0 (pr., L^1)$ 为显然，故 (x_n) 一致可积。现在令

$$\tau^k = \sum_{i=1}^{k-1} 2^i + j, \quad \omega \in [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}), \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^k,$$

则 $\tau_k \in T$，这时 $Ex_{\tau_k} = E(\sum_{j=1}^{2^k} x_{\sum_{i=1}^{k-1} 2^i + j} I_{(\tau_k = \sum_{i=1}^{k-1} 2^i + j)}) = 2^{k/2} \to \infty \ (k \to \infty)$，所以 $(x_n, \mathscr{F}_n)$ 不是 Semiamart。

参 考 文 献

〔1〕Blake, L.H., A generalization of martingales and two conseguent convergence theorems, Pacific J. Math., 35 (1970), 279—283.

〔2〕Edgar, G. A., Sucheston, L., Amarts: A class of asymptotic martingales,

J. Multivariate Anal., 6(1976), 193—221.

〔3〕Engelbert, A., Engelbert, H. J., Optimal stopping and almost sure convergence of random sequences, Z. Wahr. Verw. Geb., 48(1979), 309—325.

〔4〕Krengel, U., Sucheston, L., Semiamarts and finite values, Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), 745—747.

〔5〕Krickeberg, K., Stochastische Konvergenz von Semimartingalen, Math. Z., 66(1957), 470—486.

〔6〕Millet, A., Sucheston, L., Convergence of clsasses of amarts indexed by directed sets, Can. J. Math, XXXII (1980), 86—125.

〔7〕Mucci, A. G., Limits for martingale-like sequences, pacific J. Math., 48 (1973), 197—202.

〔8〕Subramanian, R., On a generalization of martingales due to Blake, pacific J. Math., 48 (1973), 275—278.

〔9〕Бородин, А. Н., Квазимартингалы. Теория Вероят. и её примен XXIII (1978), 661—664.

Semiamarts and the Convergence of Classes of Gafts

Wang Zhenpeng

(East China Normal University)

Abstract

Let $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ be a probability space, $(\mathscr{F}_n)$ be an increasing sequence of sub-σ-fields of $\mathscr{F}$, a sequence (x_n) of integrable random variables adapted to $(\mathscr{F}_n)$, if (x_n) is progressive uniformly integrable or (x_n) is a L^1-bounded Semiamart, then (1) $x_m - x_n \to o$ (pr.), (2) $E(x_m | \mathscr{F}_n) - x_n \to o$ (pr.) are equivalent is proved in this paper.