1986年3月

数学研究与评论
第六卷 第一期

关于“拟常曲率空间”的讨论

娄志渊

（杭州大学）

近年来，不少文章讨论到一种类型的共形平坦空间，即所谓“拟常曲率空间”，得到了关于这类空间的一些性质。然而，也出现了一些概念上混乱的情形，导至一些人在引用时或作某些判断时有所失误。本文目的一方面试图说清这些问题，另一方面也明确地界定此类空间的范围，给予一个完全的分类。为了不进行一些非普遍性问题的讨论，本文所论空间的维数 n $n>4$，并且在没有特别说明的情况下，所有出现的指标取值范围都是 $1,2,\cdots,n$。

首先，在〔1〕中，B.Y.Chen和K.Yano定义了K—特殊共形平坦空间，按我们用的符号，其定义实质上是：

设V_n是一个共形平坦黎曼空间，如果成立

$$d_{ij}=\frac{1}{2}ag_{ij}+ba_{,i}a_{,j}$$

则称V_n为K—特殊共形平坦空间。其中a、b为可以确定的不变量，d_{ij}的定义为

$$(*)\qquad d_{ij}=\frac{1}{n-2}R_{ij}-\frac{R}{2(n-1)(n-2)}g_{ij}$$

这里g_{ij}是V_n的度规张量，“,”为关于g_{ij}的共变微分，R_{ij}和R分别为V_n的Ricci曲率张量的支量和数量曲率。

由此可知，K—特殊共形平坦空间V_n可以由下面的代数特征所定义：

$$(\mathrm{I})\qquad\left\{\begin{array}{l}R_{hijk}=g_{hk}d_{ij}+g_{ij}d_{hk}-g_{hj}d_{ik}-g_{ik}d_{hj}\\ d_{ij}=\frac{a}{2}g_{ij}+ba_{,i}a_{,j}\end{array}\right.$$

条件（Ⅰ）显然等价于

$$(\mathrm{I}')\qquad R_{hijk}=a(g_{hk}g_{ij}-g_{hj}g_{ik})+b(g_{hk}a_{,i}a_{,j}+g_{ij}a_{,h}a_{,k}-g_{hj}a_{,i}a_{,k}-g_{ik}a_{,h}a_{,j})$$

其中R_{hijk}是V_n的黎曼曲率张量的支量。很显然，当a是常数时，$a_{,i}=0$，此时V_n为常曲率空间。所以，常曲率空间是K—特殊共形平坦空间的特殊情形。

应当指出，文〔1〕中证明的定理：“常曲率空间中的共形平坦超曲面必为K—特殊共形平坦空间；反之，K—特殊共形平坦空间必可等距嵌入常曲率空间作为超曲面而实现”。其前半段是不成立的。实际上，常曲率空间中的共形平坦超曲面必然成立

$d_{ij}=\frac{1}{2}ag_{ij}+bv_iv_j$，$v_i$为单位向量的支量。而且在文〔1〕中已得到

$$a_{,i}v_j-a_{,j}v_i=0,$$

很显然，当a不是常数时，$a_{,i}=kv_i$，也即$a_{,i}$，v_i共线，当然亦可写成$v_i=k'a_{,i}$。所以这时超

*1984年6月28日收到。

曲面是K—特殊共形平坦空间。但是，当a是常数时，$a_{,i}v_j - a_{,j}v_i = 0$恒成立，当然不会得出$v_i = k' a_{,i}$，因而$d_{ij}$也就不能表示成（Ⅰ）的第二式形式，所以超曲面就不一定是K—特殊共形平坦空间。实际上，把这个定理中的K—特殊共形平坦空间，改为我们下面所说的拟常曲率空间，则定理全部成立。

关于拟常曲率空间的概念，首先是V.Boju和M.Popescu在〔2〕中由纯几何概念定义的，而所讨论的空间限定度规定为正定的。其定义为：具有正定度规的黎曼空间（V_n, g），如果存在一个（单位）向量场X，使在每一点$P \in V_n$，有$X_P \neq 0$，并且对于$\theta(P) \in (0, \frac{\pi}{2})$，使得任何二维平面$\sigma \in C(X_P, \theta(P))$的截面曲率都相等，则称$V_n$为拟常曲率空间，简称QC空间。其中$C(X_P, \theta(P))$是在点P和$X_P$交角为$\theta(P)$的所有二维平面的集合。

由此定义出发，在〔2〕中得到下列结论：

（1）在V_n中选取正交单位活动标架向量场X_1、X_2、…、$X_n = X$，在在此标架下，〔2〕证得QC空间的黎曼张量的支量具有性质：

$$\left.\begin{array}{l} R_{\alpha\beta\beta\alpha} = H, \\ R_{n\alpha\alpha n} = N, \end{array}\right\} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n-1;\ \alpha \neq \beta)$$

其他支量均为O；

（2）$H_{,\alpha} = O$, $(\alpha = 1, 2, \cdots, n-1)$

由此可知，H的梯度向量kX，k为不变量。当H是常数时，$k = 0$。

从（1）易知，在此标架下，黎曼张量可以表示为形式

（Ⅱ）　$R_{hijk} = a(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + b(g_{hk}v_iv_j + g_{ij}v_hv_k - g_{hj}v_iv_k - g_{ik}v_hv_j)$

其中$a = H$，$a + b = N$，v_i是X的共变支量。（在上面标架下，$V_n = 1$，其他支量为0，由于（Ⅱ）是一个张量等式，因而在任何坐标下都成立，这就是说，QC空间的代数条件是（Ⅱ）；反过来，如果具有正定度规的黎曼空间V_n的黎曼张量具有形式（Ⅱ），则V_n为QC空间（证明很明显，从略）。由此可知，QC空间的代数特征就是（Ⅱ）。

显然，（Ⅰ′）和（Ⅱ）是不等价的。当a不是常数时，有$a_{,i} = kv_i$，或$v_i = k' a_{,i}$，此时（Ⅰ′）和（Ⅱ）等价；当a是常数时，（Ⅰ′）是常曲率空间（$a_{,i} = 0$），而（Ⅱ）不一定是常曲率空间（b不一定是0），所以此时（Ⅰ′）和（Ⅱ）不等价。由此可知，（Ⅰ′）所代表的空间（K—特殊共形平坦空间）只是（Ⅱ）所代表的空间（QC空间）的一部分。

此后，不少作者认为（Ⅰ′）和（Ⅱ）是等价的。例如，文〔3〕中直接定义："共形平坦空间的黎曼曲率张量具有形式（Ⅱ）时，称为拟常曲率空间"。并且称v_i为空间的生成元。文〔3〕的作者指出这个定义是K.Yano在〔1〕中定义的，显然认为（Ⅰ′）和（Ⅱ）是等价的。其实〔1〕文中只定义K—特殊共形平坦空间即具有特征（Ⅰ′）的空间，并没有提到拟常曲率这个名字。而事实上两文中的定义是不等价的。其次，在〔3〕中的这个定义，"共形平坦"几个字也可不要，实际上具有形式（Ⅱ）的空间必为共形平坦空间。

文〔4〕则更进一步证明（Ⅰ′）和（Ⅱ）等价。从以上所说，这个结论当然不对。在〔4〕中的证明过程中，始终认为H(即a）不为常数，我们已指出，此时（Ⅰ′）和（Ⅱ）是等价的，但H不为常数只是（Ⅱ）的一部分。其次，在H不为常数的前提下，〔4〕的作者从$H_{,i}$是法线汇进而得到一系超曲面，以$H_{,i}$为法方向向量，而规范出空间的线素形式，其后又

在此线素形式下讨论此空间又是黎曼对称（或循环）时，得到H是常数的结论（这在〔2〕中实际已有），并由此得到V_n必为常曲率空间的结论，这在逻辑上是不对的，因而结论也不会是完善的。

把度规改为非定而对拟常曲率空间进行讨论的有〔5〕，它是从〔2〕的结论直接由代数条件定义的，作为定义，不问它有否〔2〕中所提的几何性质，当然是允许的。又有〔6〕文仍用〔2〕的几何定义，这就有点问题，首先，在非正定度规空间中，两向量“交角”的“余弦”$\cos\theta$只不过是个记号，由于不能保证$|\cos\theta|\leqslant 1$，所以“θ”也没有一般角的意义，因而$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$没有意义；其次，就是把$\cos\theta$作为记号，此时按几何概念出发，要证明$V_n$的黎曼张量仍具有形式（Ⅱ），不能依靠〔2〕的证明自然得到，还得另外证明。

类似于（Ⅰ）和（Ⅰ′）的等价性，可以知道，（Ⅱ）和下面条件也是等价的：

$$(\text{Ⅱ}')\quad\left\{\begin{aligned}&R_{hijk}=g_{hk}d_{ij}+g_{ij}d_{hk}-g_{hj}d_{ik}-g_{ik}d_{hj},\\&d_{ij}=\frac{1}{2}ag_{ij}+bv_iv_j,\end{aligned}\right.$$

其中a，b为不变量，是可以确定的；v_i为单位向量的支量。我们不妨在取消正定度规的限制下，定义黎曼曲率张量具有形式（Ⅱ）的黎曼空间，为拟常曲率空间。

由（Ⅱ′）的第二式知，v_i是d_{ij}关于g_{ij}的主方向，并且凡和v_i正交的方向，也都是d_{ij}对应的主方向，由d_{ij}的定义（*）知，d_{ij}的主方向和R_{ij}的主方向一致，且相等，主曲率的个数也一致。故（Ⅱ′）表示至少有$n-1$个Ricci主曲率相等的共形平坦空间。因而也可以称之为“共形平坦拟爱因斯坦空间”。

其实，首先在非正定度规下研究此类空间的是〔7〕文。只不过是用另一种形式出现的．〔7〕文讨论的空间代数特征是

$$(\text{Ⅲ})\quad\left\{\begin{aligned}&R_{hijk}=g_{hk}d_{ij}+g_{ij}d_{hk}-g_{hj}d_{ik}-g_{ik}d_{hj},\\&(n-2)(\rho-\varDelta)R_{hijk}=(n-2)^2(d_{hj}d_{ik}-d_{hk}d_{ij})+\\&+(\rho-\varDelta)^2(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}),\end{aligned}\right.$$

其中ρ，$\varDelta$是不变量，其定义参看〔7〕文。

现在我们给出（Ⅱ′），（Ⅲ）等价性的一个证明：

（1）（Ⅲ）⇒（Ⅱ′）：把（Ⅲ）的第一式代入第二式，并且记$A_{ij}\equiv(n-2)d_{ij}+(\rho-\varDelta)g_{ij}$，则就得到

$$A_{hk}A_{ij}-A_{hj}A_{ik}=0$$

这表示矩阵(A_{ij})秩最多是1，又A_{ij}是对称二阶共变张量，因而A_{ij}可表为

$A_{ij}=\rho v_iv_j$，这就是d_{ij}具有（Ⅱ′）的第二式的形式，故（Ⅱ′）成立。

（2）（Ⅱ′）⇒（Ⅲ）：把$d_{ij}=\frac{1}{2}ag_{ij}+bv_iv_j$代入〔7〕中计算，可得

$$\varDelta=\frac{n}{2}a+be,\ (e=\pm 1=g^{ij}v_iv_j);$$

$\rho=a+be$，故$\rho-\varDelta=-\frac{(n-2)}{2}a$，这时（Ⅲ）的第二式自然成立，故（Ⅲ）成立。

在〔7〕的开头说明中，认为此种类型的空间都是阶一共形平坦空间，我们将指出其中

有阶 2 的：又〔7〕中认为这种空间可以等距嵌入曲率为任何常数K的常曲率空间$S_{n+1}(K)$中作为超曲面，我们将指出，在某些情形下，有些K要除外；

为了界定（Ⅱ）的范围，我们把（Ⅱ）的形式改写为另一形式，即对某一常数K，（Ⅱ）可写为：

（Ⅳ）
$$R_{hijk}=-(a+K)(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})+b(g_{hk}v_iv_j+g_{ij}v_hv_k-g_{hj}v_iv_k-g_{ik}v_hv_j)+K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

当$a+K\neq 0$时，我们取符号e，使$-e(a+K)>0$，令$S=\sqrt{-e(a+K)}$，$St=-b$，并记$h_{ij}=Sg_{ij}+tv_iv_j$，则（Ⅳ）变为

（Ⅴ）
$$R_{hijk}=e(h_{hj}h_{ik}-h_{hk}h_{ij})+K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

则（Ⅴ）可以看作是V_n等距嵌入$S_{n+1}(K)$中作为超曲面的高斯方程，其中h_{ij}为它的第二基本张量。因此，V_n为拟脐的。由于$S\neq 0$，故V_n的主曲率至少有$n-1$个不为 0（即S），即矩阵（h_{ij}）的秩数$\geqslant 4$，根据〔8〕，柯达奇方程是（Ⅴ）的推论，自然成立。

由此可以得到，拟常曲率空间（Ⅱ），按a、b的完全分类为：

（1）$b=0$，$\Rightarrow a$是常数：

（i）$a\neq 0$：V_n为常曲率空间$S_n(a)$；

（ii）$a=0$：V_n为平坦空间。

（2）$b\neq 0$：V_n不是常曲率空间。

（i）$a\neq$常数：由于对任何常数K，都有$a+K\neq 0$，所以V_n可以等距嵌入$S_{n+1}(K)$中作为超曲面，K可以任意。因为可取$K=0$，因而V_n为一阶共形平坦空间；

（ii）$a=$常数$\neq 0$：这时V_n可以等距嵌入$S_{n+1}(K)$中作为超曲面，但$K\neq -a$，由于$a\neq 0$，所以K可为 0，因而V_n是一阶共形平坦空间；

（iii）$a=$常数$=0$：这时V_n可以等距嵌入$S_{n+1}(K)$中作为超曲面，但$K\neq 0$。所以V_n不是一阶的，又由于它是共形平坦空间。故V_n为二阶共形平坦空间。

要证明情况（2）(iii）必为二阶共形平坦空间，首先指出，一阶共形平坦空间必为类型（Ⅱ$'$）空间。这是因为：众所周知，一阶共形平坦空间至少有$n-1$个主曲率相等，又主方向和R_{icci}主方向一致，可算出Ricci主曲率也至少有$n-1$个相等，故是（Ⅱ$'$）型空间。

其次，我们知道，由于$b\neq 0$，故（2）(iii）空间不是平坦空间，因此，只要证明它不可能是一阶空间即可。如果它是一阶的，通过计算，可以得到在（2）(iii）条件下，V_n的$n-1$个相等的主曲率都是 0，因而（b_{ij}）的秩最多是 1，故$R_{hijk}=0$，这表示V_n为平坦空间和$b\neq 0$矛盾。

容易知道，K—特殊共形平坦空间，在上面分类中，只包括（1）和（2）(i）几个类型。

另外我们已经知道，当（Ⅱ$'$）中a不是常数时，$v_i=ka_{,i}$，故v_i是法线汇；而在a是常数的情况下，也容易证明单位向量v_i是法线汇（证明略），因此，类型（Ⅱ$'$）空间中，都有一族以v_i为法向量的超曲面系，利用这个性质，很容易规范出上面分类下的各V_n的规范线素。这些方法都是常规的，从略。

至于用（Ⅱ）或（Ⅱ$'$）定义的拟常曲率空间，是否具有〔2〕中的几何性质，以及更广泛地

允许v_i为零向量（即$g_{ij}v_iv_j=0$）的情况，都是容易解决的．我们将在另文中讨论。

最后，顺便指出：由于共形平坦空间的基本形式可以规范为

$$\varphi=\frac{1}{\rho^2}\sum_{i=1}^{n}e_i(\mathrm{d}x^i)^2,\quad(e_i=\pm 1)$$

而其中函数ρ具有性质：

$$\rho,_{ij}=AR_{ij}+Bg_{ij},\quad(A,B\text{为不变量})$$

因而，$\rho,_{ij}$, R_{ij}, d_{ij}具有形式$Ag_{ij}+Bv_iv_j$是等价的，即它们关于g_{ij}的主方都是一致的，且相等主曲率的个数也是一致的。当$\rho,_{ij}=Ag_{ij}$时，这个共形对应是保圆的，此时V_n为常曲率空间。因此，我们可以说：拟常曲率空间（Ⅱ）的特征是和平坦空间“拟保圆”对应的空间。因而规范出的一些线素具体形式，实际上可以看作微分方程$\rho,_{ij}=Ag_{ij}+Bv_iv_j$的某些解的形式．

再者，我们曾说过，在（Ⅱ′）中的a和b是可以确定的不变量，实际上，如果我们记v_i方向对应的Ricci主曲率为T，即

$R_{ij}v^i=Tv_j$，则通过（＊）和（Ⅱ′）的第二式短缩计算，可得

$$a=\frac{R-2T}{(n-1)(n-2)},\quad b=\frac{e(nT-R)}{(n-1)(n-2)},\quad(e=g^{ij}v_iv_j)$$

最后，我们有

定理：共形平坦空间V_n为拟常曲率空间的充要条件是它的R_{icci}主曲率至少有$n-1$个是相等的。

这个定理可以作为拟常曲率空间的内蕴性几何特征。

我们可以用下面关系来结束本文：

共形平坦空间⊃拟常曲率空间⊃一阶共形平坦空间⊃K—特殊共形平坦空间⊃常曲率空间⊃平坦空间。

参 考 文 献

〔1〕Bang-yen Chen and Kentaro Yano, Hypersurfaces of a conformally flat sp space, Tensor(N.S.), Vol.26(1972), 318-322.

〔2〕Valentin Bojn & Mariana Popescu, Espaces a courbure Quasi-constante, J.Differential Geometry, 13(1978), 373-383.

〔3〕Yuen-de Wang, On some properties of Riemannian spaces of quasi constant curvature, Tensor(N.S.), Vol.35(1981).

〔4〕Hwang Cheng-Chung, Some Theorems on the spaces of quasi-constant curvature, 数学研究与评论, Vol.3, No.1(1983), 1—16.

〔5〕蒋声，黎曼主曲率与拟常曲率空间，自然杂志，5卷9期(1982)，713.

〔6〕水乃翔，关于拟常曲率空间的几个定理，杭州大学学报，10卷3期(1983)，285—294.

〔7〕Pa Chen-Kuo, Local isometric imbedding of riemannian manifolds M^n into a space of constant curvature S^{n+1}, Chin.Ann.of Math., 3(4),(1982), 471-482.

〔8〕胡和生，论黎曼测度V_m在常曲率空间S_{m+1}中的变形，数学学报，6卷2期(1956)，320-331.