对不完备基上 $D_\Omega(f)$ 的探讨

吕 义 忠
（南京大学）

自从1971年Spira〔1〕首先讨论了$D_\Omega(f)$这类复杂性问题以来，至1976年Savage〔2〕才把他的结果推广到一切完备基Ω上去，此后进展甚少。近几年来几乎没有看到在完备基上$D_\Omega(f)$有什么新的结果。基于不完备基 $\{\wedge, \vee\}$在理论和实践中的重要性，我们转去探讨其上$D_\Omega(f)$的性质并且得到一个新结果。

定义 如果每个布尔函数皆可由变元和基中函数经有限次复合而得，我们便说该基为完备基。反之，便说相应的基为不完备基。

Savage在推广Spira的结果至完备基Ω后所得的主要结果为〔2〕：

定理 〔Savage〕。设$f:\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$为布尔函数，又设$\Omega$为完备基。定义选择函数为：

$$\mathrm{Sel}(x, y, z) = \begin{cases} y & \text{当} x = 0 \text{时，} \\ z & \text{当} x = 1 \text{时。} \end{cases}$$

则

$$\log_r[(r-1)L_\Omega(f)+1] \leqslant D_\Omega(f) \leqslant K_r \log_r[(r-1)L_\Omega(f)+1]$$

其中， $K_r = (D_\Omega(\mathrm{Sel})+1)/\log_r[(r+1)/r]$。

我们在不完备基上求得的结果改进了上述不等式的上界。我们需要不减函数的概念。

定义 布尔函数为不减函数，如果对任何变元$x_i \leqslant x_i'$（$1 \leqslant i \leqslant n$），皆有

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \leqslant f(x_1, \cdots, x_i', \cdots, x_n)。$$

引理 不完备基 $\{\wedge, \vee\}$ 上任一布尔函数皆为不减函数。

证明 对函数的深度归纳。

显然，并非任一完备基或不完备基上的布尔函数皆有此性质的。利用不完备基 $\{\wedge, \vee\}$上布尔函数不减的特性容易证明以下结论：

定理 对不完备基 $\{\wedge, \vee\}$ 上的任一布尔函数$f:\{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$ 皆有

$$\log_2[L_\Omega(f)+1] \leqslant D_\Omega(f) \leqslant K \cdot \log_2[L_\Omega(f)+1]。$$

其中，$K = 3/(\log_2 3 - 1)$。

这就是我们的新结果。显然它改进了完备基上Savage定理中$D_\Omega(f)$的上界。

参 考 文 献

〔1〕P.M.Spira, On Time-Hardware Complexity Tradeoffs for Boolean Functions, Proceedings of Fourth Hawaii International Symposium on System Sciences, 1971.

〔2〕John E.Savage, The Complexity of Computing.John Wiley Sons, New York, 1976.

〔3〕Lu Yizhong(吕义忠), Some Applications of Boolean Form to Analyze and Manage Large Data Sets, The Journal of Symbolic Logic, 1984.

* 1984年11月 6 日收到。