1986年5月

数学研究与评论
第六卷 第二期

论域上和可换环上的群代数的Jacobson根基*

熊 胜 利

（河南师范大学）

本文讨论char K $= p \neq 0$ 之域K上的有限群群代数K〔G〕的Jacobson根基，推广Bedl关于Frobenius群群代数之J—根基的结果，并讨论特征为P^r的可换环上的群环的J—根基。本文记法同〔1〕。

§1 特征为p≠0的域K上有限群群代数的根基

Maschke定理指出，若$o(G) < \infty$，则JK〔G〕$=0$ 当且仅当char k $=0$ 或char K $= p$且$p \nmid o(G)$。对于char K $= p$且$p \mid o(G)$的情况〔2〕指出：若G是有补P的Frobenius群，P是G的Sylow p—子群，则JK〔G〕$= \bigcap_{x \in G}$ JK〔P^x〕K〔G〕。对于满足上述条件的K〔G〕，有$\bigcap_i$L（$\widehat{N}_i$）$= \bigcap_x$JK〔P^x〕K〔G〕。N_i历遍G的p'—截面〔引理1.4〕故有JK〔G〕$= \bigcap_i$ L（$\widehat{N}_i$）。现提出下面的问题：若char K $= p, o(G) < \infty$，$p \mid o(G)$，等式JK〔G〕$= \bigcap_i$ L($\widehat{N}_i$）是否成立？其中N_i历遍G的p'—截面，即对G的任p—正则元x_i，$N_i = S(x_i) = \{g \in G \mid g$的$p'$—分量与$x_i$G共轭$\}$。

下面证明这一结论是肯定的。本节K的特征为$p \neq 0, o(G) = p^r m$，$r \geqslant 1$，$(p, m) = 1$。记〔K〔G〕，K〔G〕〕$=$VK〔G〕。

引理1.1 令$x_1, x_2, \cdots, x_s$是G的全体p—正则共轭类的代表元，则K〔G〕的每一个元可唯一地写成$a = a_1 x_1 + \cdots + a_s x_s + y$，其中$a_i \in$ K，$y \in$ TK〔G〕$= \{y \in$ K〔G〕$\mid y^{p^n} \in$ VK〔G〕，对一定的$n \in \mathbf{Z}\}$。

证明：由〔3〕，$x \in$ G，可记$x = \pi\rho = \rho\pi$，π是p—元，ρ是p'—元，则对适当的n有$(x-\rho)^{p^n} = x^{p^n} - \rho^{p^n} = \rho^{p^n} - \rho^{p^n} = 0$，故$x - \rho \in$ TK〔G〕。又ρ是p—正则元，存在x_i，$\rho \sim x_i$，且$\rho - x_i \in$ TK〔G〕，从而$x - x_i \in$ TK〔G〕，即$x = x_i + y'$，$y' \in$ TK〔G〕。因此$\forall a \in$ K〔G〕，有$a = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i + y$。

现令$a_1 + \cdots + a_s x_s + y = 0$，可选择适当的$n \geqslant y$，使$p^n \equiv 1 \pmod n$，且$(a_1 x_1 + \cdots + a_s x_s)^{p^n} \in$ VK〔G〕，又$(a_1 x_1 + \cdots + a_2 x_s)^{p^n} = a_1^{p^n} x_1 + \cdots + a_s^{p^n} x_s + \beta$，$\beta \in$ VK〔G〕，故$a_1^{p^n} x_1 + \cdots + a_s^{p^n} x_s \in$ VK〔G〕且$a_i = 0$，上述记法是唯一的。

---

* 1982年2月8日收到。

引理1.2 L($\widehat{N}_i$) 为K(G)的理想。

证明 $y\in N_i$，记 $y=\pi\rho=\rho\pi$，$\forall x\in G$，则 $x^{-1}yx=(x^{-1}\pi x)(x^{-1}\rho x)=(x^{-1}\rho x)(x^{-1}\pi x)$，故 $x^{-1}yx\in N_i$，$x^{-1}N_ix=N_i$，有 $\widehat{N}_ix=x\widehat{N}_i$，故 $[L(\widehat{N}_i)x]\widehat{N}=0$，L($\widehat{N}_i$)为K〔G〕的理想。▌

引理1.3 令 e 为K〔G〕的本原幂等元，则 $e\notin$ VE〔G〕。

证明 作映射 ρ: K〔G〕$\longrightarrow$ End(K〔G〕)，$\rho(\Sigma ax)=\Sigma a_x\rho(x)$，其中 $\rho(x)=\Sigma b_g)=\Sigma b_g(xg)$。若 $\Sigma a_x\rho(x)=0$，则 $\Sigma a_xx=0$，∴ ρ 是1—1同态。令 $o(G)=n$，则 End(K〔G〕)$\simeq M_n$(K) 将 $\rho(x)$ 在基 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 下的阵仍记作 $\rho(x)$，K〔G〕到 M_n(K〕的同态仍用 ρ 表示。ρ 是1—1的，∴ e 的象 $\bar{e}\in M_n$(K) 是本原幂等阵。现设 $e\in$ VK〔G〕，则 $\bar{e}\in VM_n$(K) 故 $Tr\bar{e}=0$，又因 $\bar{e}$ 的最小多项式为 $x-1$ 或 x^2-x，∴ $\bar{e}$ 的特征多项式的初等因子为 x 与 $x-1$，故存在 $A\in M_n$(K)。使 $\bar{e}=A\begin{pmatrix}0&&&&\\&\ddots&&&\\&&0&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\\&&&&&1\end{pmatrix}A^{-1}$（$t$ 列 1），因 $p|t$，

故 $t\geqslant 2$。令 $\bar{f}_1=\begin{pmatrix}0&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1&\\&&&&&&0\end{pmatrix}$ $\}(t-1)$ 行，$\bar{f}_2=\begin{pmatrix}0&&&\\&\ddots&&\\&&0&\\&&&1\end{pmatrix}$。

记 $\bar{e}_1=A\bar{f}_1A^{-1}$，$e_2=A\bar{f}_2A^{-1}$，则 $\bar{e}=\bar{e}_1+\bar{e}_2$，$\bar{e}_1,\bar{e}_2$ 是彼此正交的幂等阵，$\bar{e}$ 不是本原的，矛盾。故 $e\in$ VE〔G〕。

引理1.4 G是带补P的Frobenius群，P是G的Sylow p—子群，$x_1,\cdots x_s$，$x_{s+1}=1$ 为G的全体 p—正则共轭类的代表元，$N_i=S(x_i)$ 为G的 p'—截面，$i=1,2,\cdots,s+1$，则 $\bigcap_i L(\widehat{N}_i)=\bigcap_{x\in G}JK[P^x]K[G]$。

证明 令N为G的Frobenius核，则 $N=N_1\cup\cdots\cup N_s\cup\{1\}$. $\forall x\in G$，$xN=Nx$，∴ $a\widehat{N}=\widehat{N}a$，$\forall a\in K[G]$。我们先证明 $\bigcap L(\widehat{N}_i)\subseteq\bigcap JK[P^x]K[G]$。$\forall a\in\bigcap L(\widehat{N}_i)$，$a\widehat{N}_i=0$，故 $a(\widehat{N}-1)=0$，故 $a\widehat{N}=a$，又 $\widehat{P^x}a=\widehat{P^x}[a\widehat{N}]=(\widehat{P^x}\widehat{N})a=\widehat{G}a=(\Sigma\widehat{N}_i)a=0$，∴ a 是 $\widehat{P^x}$ 的右零因子，故 $a\in\omega(K[P^x])K[G]=JK[P^x]K[G]$，且 $\bigcap L(\widehat{N}_i)\subseteq\bigcap JK[P^x]K[G]$。

反之，$\forall\beta\in\bigcap JK[P^x]K[G]$。类似〔2〕定理1的证明可得 $\beta\in JK[P]\widehat{N}$，JK·〔P〕$\widehat{N}$ 是K〔G〕的幂零理想。故存在适当的 $n\geqslant r$，$P^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$，使 $o=\beta^{p^n}=\Sigma b_y^{P^n}\cdot y^{P^n}+\gamma$，$\gamma\in VK[G]$。由〔1〕引理2.3.2 得 $(\Sigma b_y^{P^n}y^{P^n})(c)=0$，$c$ 为G的任一共轭类。因 y^{P^n} 是 p—正则元，对固定的 i，$\sum_{y^{P^n}\in N_j}b_y=0$，记 $y^{P^n}=\rho_j\in N_j$，$\rho_j^{-1}=\rho_i\in N_i$，则 $\sum_{y^{p^n}\rho_i=1}b_y=0$。现观察 $\beta\widetilde{\widehat{N}}_i(1)=\sum_{yn_i=1}b_y$，$n_i\in N_i$。令A＝$\{y\,|\,y\in\mathrm{Supp}\beta,\ y^{P^n}\rho_i=1,\ \rho_i\in N_i$ 为 p—正则元$\}$，B＝$\{y\,|\,y\in\mathrm{Supp}\beta,\ yn_i=1,\ n_i\in N_i\}$。$\forall y\in B$，$yn_i=1$.记 $n_i=\pi_i\rho_i$，

则$y=n_i^{-1}=\pi_i^{-1}\rho_i^{-1}$。故$y^{P^n}\rho_i=1$，且$y\in A$。反之，$\forall y'\in A$，$y'=\pi\rho$，故$\rho_i y'^{P^n}=y'^{P^n}\rho_i=1$，$\rho\rho_i=1$，得$y'(\rho_i\pi^{-1})=1$。又$\rho_i\pi^{-1}\in N_i$，故$y'\in B$。可见$A=B$。这样我们得到$\widetilde{\beta}\widehat{N}_i(1)=\sum\limits_{yn_i=1}b_y=\sum\limits_{y^{P^n}\rho_i=1}b_y=0$。现记$\beta\widehat{N}_i=\Sigma(\sum\limits_{yn_i=h}b_y)h$。因$h^{-1}\beta\in JK[P]\widehat{N}$，故$\widetilde{(h^{-1}\beta)}\widehat{N}_i(1)=0=\sum\limits_{yn_i=h}b_y$，且$\beta\in L(\widehat{N}_i)$。从而$\bigcap JK[P^x]K[G]\subseteq\bigcap L(\widehat{N}_i)$引理1.4成立。∎

定理1 令$\mathrm{char}K=p$，$o(G)=p^rm$，$r\geqslant1$，$(p,m)=1$，G的全体p'—正则共轭类代表元为$x_1,\cdots,x_s$，$N_i=S(x_i)$为G的p'—截面，$i=1,2,\cdots,s$，则$JK[G]=\bigcap\limits_i L(\widehat{N}_i)$。

证明 先证$JK[G]\supseteq\bigcap L(\widehat{N}_i)$，∴$K[G]$是有限维$K$—代数，故只要证明$\bigcap L(\widehat{N}_i)$不含有非零幂等元就足够。若$L(\widehat{N}_i)$含有非零幂等元，$L(\widehat{N}_i)$必含有本原幂等元$e$，$e\widehat{N}_i=0$。由引理1.2，$e=a_1x_1+\cdots+a_sx_s+y$，$y\in TK[G]$，可选择适当的$n\geqslant r$，$p^n\equiv1\pmod m$，使$e=e^{P^n}=a_1x_1+\cdots+a_sx_s+\beta$，$\beta=\sum b_yy\in VK[G]$。$\widetilde{\beta}\widehat{N}_i(1)=\sum\limits_{yn_i=1}b_y$，对于满足$yn_i=1$且$n_i$彼此共轭的$y$必彼此共轭，设这样的$n_i$，$y$在$G$中的共轭类分别为$C_o$，$C_o'$，$y\in\mathrm{supp}\beta\cap C_0'$，则存在$t\in G$及满足上述条件的$y_0$使$y_on_i=1$，$y=t^{-1}y_ot$ ∴$y(t^{-1}n_it)=1$，但$t^{-1}n_it\in N_i\cap C_o$。故$\mathrm{supp}\beta\cap C_0'$中的$y$都具有$yn_i=1$的性质。对于$N_i$中的这些$n_i$适当分类得$\widetilde{\beta}\widehat{N}_i(1)=\sum\limits_{yn_i=1}b_y=\widetilde{\beta}(C_o')+\cdots+\widetilde{\beta}(C_\mu')=0$，∴$\widetilde{e}\widehat{N}_i(1)=\sum\limits_{x_in_i=1}a_j+\widetilde{\beta}\widehat{N}_i(1)=\sum\limits_{x_in_i=1}a_j=0$。又满足$x_jn_i=1$的$n_i^{-1}$是$p$—正则元，这样的$n_i^{-1}$彼此共轭，相应的$x_j$亦彼此共轭，由$x_j$的取法知$\sum\limits_{x_jn_i=1}a_j=a_\lambda=0$，当$N_i$取遍$G$的所有$p'$—截面时，$x_\lambda$取遍$x_1,\cdots,x_s$，∴$a_1=\cdots=a_s=0$。从而$e=\beta\in VK[G]$，与引理1.3矛盾。故$\bigcap L(\widehat{N}_i)$不含非零幂等元，$JK[G]\supseteq\bigcap L(\widehat{N}_i)$。

反之，作自然同态$K[G]\longrightarrow K[G]/L(\widehat{N}_i)=\overline{K[G]}$，只要证明$\overline{K[G]}$是半单的即可。设$I$是$\overline{K[G]}$的幂零理想，$\forall\,\overline{a}=a+L(\widehat{N})\in I$，$a=\sum a_xx$，可选择适当的$t\geqslant r$，$p^t\equiv1\pmod m$，$a^{P^t}\in L(\widehat{N}_i)$。因$a^{P^t}=\sum a_x^{P^t}+\beta$，$\beta\in VK[G]$故$0=\widetilde{a^{P^t}}\widehat{N}_i(1)=\sum\limits_{x^{P^t}n_i=1}a_x^{P^t}+\widetilde{\beta}\widehat{N}_i(1)=\sum\limits_{x^{P^t}n_i=1}a_x^{P^t}$。类似引理1.4的证明，得$\sum\limits_{x^{P^t}n_i=1}a_x^{P^t}=\sum\limits_{xn_i=1}a_x=0$，所以$\widetilde{a}\widehat{N}_i(1)=0$。记$a\widehat{N}_i=\sum\limits_{h\in G}(\sum\limits_{xn_i=h}a_x)h$，因$\overline{h^{-1}}\,\overline{a}\in I$，故存在适当的$k$，使$(h^{-1}a)^{P^k}\in L(\widehat{N}_i)$，∴$\sum\limits_{xn_i=h}a_x=\widetilde{(hh^{-1}a)}\widehat{N}_i(1)=0$，这样$a\widehat{N}_i=0$，$\overline{a}=0$，$\overline{K[G]}$是半单的，故$JK[G]\subseteq L(\widehat{N}_i)$，$\forall i$。从而$JK[G]=\bigcap\limits_i L(\widehat{N}_i)$

推论 [Bedl] $\mathrm{char}K=p$，G是带P的Frobenius群，P是G的Sylow p—子群，则$JK[G]=\bigcap\limits_x JK[P^x]K[G]$。

§2 可换环上Frobenius群群环的Jacobson根基。

引理2.1 R是带单位元的可换环，P是有限群G的子群。若$JR^*[G]=\bigcap\limits_x JR^*[P^x]R^*[G]$，则$JR[G]=\bigcap\limits_x JR[P^x]R[G]$，其中$R^*=R/JR$。

证明 记X为P在G中的右横截，则$R[G]$的任一元可写成$\sum a_jx_i$的形式，$a_i\in R[P]$，

$x_i \in X$。作映射φ: R〔G〕$\longrightarrow$R*〔G〕，$\varphi(\sum a_x x) = \sum a_x^* x$。$\forall a = \sum d_i x_i \in$ JR〔G〕，则$\varphi(a) \in$ JR*〔G〕$\subseteq$JR*〔P^x〕R*〔G〕。又同态核Kerφ = $\{\sum a_x x \mid \sum a_x^* x = 0\}$ = (JR)〔G〕，∴R〔G〕/(JR)〔G〕$\simeq$R*〔G〕。由〔4〕(JR)〔G〕$\subseteq$JR〔G〕，∴JR*〔G〕$\simeq$JR〔G〕/(JR)〔G〕。同理，JR*〔P〕$\simeq$JR*〔P〕/(JR)〔P〕。再作射影Π_P^*: R*〔G〕$\longrightarrow$R*〔P〕，$\Pi_p^*(\sum_{x\in G} a_x^* x) = \sum_{x\in P} a_x^* x$，∴$\varphi(a_1) = \Pi^*_P(\varphi(a)) \in \Pi^*_P$(JR*〔$P^x$〕R*〔G〕)= JR*〔$P^x$〕，从而$a_1 \in$ JR〔P^x〕，∴$a_i \in$ JR〔P^x〕。反之，$\forall\ \in \bigcap$JR〔P^x〕R〔G〕，$\varphi(\beta) \in \bigcap$JR*〔$P^x$〕R*〔G〕= JR*〔G〕，∴$\beta \in$ JR〔G〕。从而JR〔G〕= $\bigcap_x$JR〔P^x〕R〔G〕。▮

定理 2 令R是带单位元的可换环，charR = p^t，$t \geq 1$. G是有补P的Frobenius群，P是G的Sylow p—子群，则JR〔G〕= $\bigcap_x$JR〔P^x〕R〔G〕。

证明 令R* = R/JR，$\{I_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$为R*的极大理想之集，设$R_\mu$ = R*/I_μ，则R_μ是特征为p的域，故有JR_μ〔G〕= $\bigcap_x$ JP_μ〔P^x〕R_μ〔G〕。下面证明等式JR*〔G〕= $\bigcap_x$JR*〔P^x〕R*〔G〕成立。作φ_μ: R*〔G〕$\longrightarrow R_\mu$〔G〕，$\varphi(\sum_g a_g g) = \sum_g a_{\mu g} g) = \sum_g a_{\mu g} g$，$a_{\mu g}$为$a_g \in$ R*在R_μ中的同态像。Ker$\varphi = I_\mu$〔G〕。又作射影$\Pi_{p^x\mu}$: R_μ〔G〕$\longrightarrow R_\mu$〔P^x〕，$\Pi_{p^x\mu}(\sum_{g\in p^x} a_{\mu g} g) = \sum_{g\in p^x} a_{\mu g} g$。现$\forall a = \sum a_i n_i \in$ JR*〔G〕，$\alpha_i \in$ R*〔P^x〕，$n_i \in$ N，x为G的任一固定元，不妨令$n_1 = 1$，$\varphi_\mu(a) \in$ JR_μ〔G〕$\subseteq$JR_μ〔P^x〕R〔G〕，而有$\Pi_{p^x\mu}(\varphi_\mu(a) = \varphi_\mu(a_1)$，故$\varphi_\mu(a_1) \in$ JR_μ〔P^x〕。设o(G〕= $p^r m$，$(m, p) = 1$，则 (JR_μ〔P^x〕)$^{p^r}$ = 0，且$\varphi_\mu(\alpha_1^{p^r}) = 0$，故$a_1^{p^r} \in$ Ker$\varphi = I_\mu$〔G〕，$\forall \mu \in \Lambda$。由R*的半单性得$a_1^{p^r} \in \bigcap_\mu I_\mu$〔G〕= 0。这样，$a_1$是幂零元，故$\Pi_P$(JR*〔G〕)$\subseteq$JR*〔$P^x$〕，且有$a_1 \in$ JR*〔P^x〕，$a_i \in$ JR*〔P^x〕。于是$a \in$ JR*〔P^x〕R*〔G〕。反之，$\forall \beta \in \bigcap$JR*〔$P^x$〕R*〔G〕，则$\varphi_\mu(\beta) \in \bigcap$J$R_\mu$〔$P^x$〕$R_\mu$〔G〕= J$R_\mu$〔G〕。同上可知$\beta$是幂零元，故$\beta \in$ JR*〔G〕。这样有JR*〔G〕= $\bigcap$JR*〔P^x〕R*〔G〕。

由引理2.1,得JR〔G〕= $\sum_{x\in G}$ JR〔P^x〕R〔G〕。 ▮

由定理 2 的证明方法，可得

命题 令R是带单位元的可换环，charR = p^m，$m \geq 1$. 若G满足下列条件之一：i）G是Abel p'—群；ii）G是局部有限p'—群；iii）G是可解p'—解，则有JR〔G〕$\subseteq$ (JR)〔G〕。

我们可以用定理 1 计算〔2〕§3所举K〔G〕的Jacobson根基，其例如下：

令 N = $\{ n_{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \}$。N是一个阶为27的群。$\forall n \in$ N，$n^3 = 1$。记$a = n_{100}$，$b = n_{001}$，$c = n_{010}$，可验证N =（a，b，c）。给出N的一个自同构

σ, $\sigma(n_{\alpha\beta\gamma}) = n_{(-\alpha)\beta(-\gamma)}$。再令$H=\langle x\rangle$，$x^2=1$,令$G=N\times_\sigma H$，$xn=\sigma(n)x$。〔2〕证明对于$\mathrm{char}K=2$, K〔G〕的J—根基不等于$\bigcap$JK〔$P^x$〕K〔G〕。我们利用$p'$—截面的左零化子计算JK〔G〕，$o(G)=54$，共有7个2'—截面：$\hat{N}_1=\hat{S}(1)=1+x+(a+n_{200})x+(b+n_{002})x+(n_{211}+n_{112})x+(n_{222}+n_{121})x$，$\hat{N}_2=\hat{S}(c)=\hat{N}_1c$，$\hat{N}_3=\hat{S}(c^2)=\hat{N}_1c^2$，$\hat{N}_4=(a+n_{200})(1+c+c^2)$，$\hat{N}_5=(b+n_{002})(1+c+c^2)$，$N_6=(n_{211}+n_{112})(1+c+c^2)$，$\hat{N}_7=(n_{222}+n_{121})(1+c+c^2)$,其中对$\forall nx\in N_1$，$\sigma(n)=n^2$；$\forall nx\in N_2$，$N_3$，$\sigma(n)x\in N_2$，$N_3$；$\forall n\in N_j$，$\sigma(n)\in N_j$，$j=4,5,6,7$。注意到c在G的中心，$\therefore L(\hat{N}_1)=L(\hat{N}_2)=L(\hat{N}_3)=\{K[G](1+c)\hat{N}_1, \hat{G}\}$，$\bigcap_{j=4}^{7}L(\hat{N}_j)=\{K(G)(1+c), \hat{G}\}$，$\therefore JK[G]=\bigcap_{1}^{7}L(\hat{N}_j)=\{K[G](1+c)\hat{N}_1, \hat{G}\}$。

参 考 文 献

〔1〕Passman, D. S., The Algebraic Structure of Gronp Rings, New York 1977.

〔2〕Bedl, S. S., The Jacobson radical of the group algebra of a finite group, *Proc. Amer. Math. Soc.* 1 (1979) p 13—18.

〔3〕M. 赫尔，群论（中译本，裘光明译）。

〔4〕Connell, G., On the group rings, *Can. Jour. of Math.* Vol 15 (1963), №. 4, *pp* 650—685.

〔5〕Kurzweil, H., An Introduction to Finite Group. Erlangen Springer (1977).

〔6〕Jacobson, N., Strucure of rings, *Amer. Math. Soc. Collog. Publ*. 37 (1956)。

〔7〕Sehgal, S. K., Topics in Group Rings, New York (1978).

On the Jacobson radicals of the group algebras over a field and over a commutative ring

Xiong Sheng Li

Abstract

In this paper we generalize Bedl's results on the Jacebson radical of the group algebra of a Frobenius group to the case of group algebras over a field and over a commutative ring with identity. The main results are the following:

Theorm Ⅰ. Let K be a field of $\mathrm{char}K=p\neq0$, and let G be a finite group of order $p^r m$, where $r\geqslant1$, $(p, m)=1$. If $x_1, x_2, \cdots, x_s$ are representatives of all p-regular conjugacy classes of G, and $N_i=S(x_i)$ are p'-sections of G, $i=1,2,\cdots s$, then we have

$$JK[G]=\bigcap L(\hat{N}_i).$$

Theorem 2. Let R be a commutauve nng with identity and of $\mathrm{char}R=p^m$, $m\geqslant1$, If G is a Frobenius group with complement P which is a Sylow p-subgroup, then we have. $JR[G]=\bigcap_{x\in G}JR[P^x]R[G]$