关于函数系 $\{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}\}$的一些问题*

沈燮昌

（北京大学）

在正实轴上考虑函数系 $\{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}\}$，其中$\mathrm{Re}\mu_n>0$，$n=1,2,\cdots$，且用$s_k$表示$\mu_k$在$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k\}$中出现的次数，$p_k$表示$\mu_k$在序列$\{u_n\}_1^\infty$中出现的次数，已知

Müntz-Szasz 定理：要使函数系$\{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}\}$在空间$L^2[0,+\infty)$中完备，即对任意$f(x)\in L^2[o,+\infty)$，对任给$\varepsilon>0$，存在$P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}$使得

$$\|f(x)-P_n(x)\|=\left[\int_0^{+\infty}|f(x)-P_n(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}\mu_k}{1+|\mu_k|^2}<+\infty \tag{1}$$

（可参看〔1〕，那里只对$s_k=1$，$k=1,2,\cdots$，作出了证明，实际上对任何的$s_k\geqslant1$都成立）。

M. M. Джрбашян 在工作〔2,3〕中研究条件（1）不满足时，即函数系$\{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}\}$在$L^2[0,+\infty)$中不完备时，空间$L^2[0,+\infty)$中子空间的特征性质，使得这个子空间中任意函数都可以在此空间中被函数系$\{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}\}$的线性组合逼近。但是他没有给出详细的证明，只是指出，为了要得到这个结果，需要用到他的另一篇文章〔4〕中有关泛函分析的一些结果。本文除了给出这个结果的简单证明以外，还得到了另一些有关矩量及基问题的一些结果。

今后，我们总是认为条件（1）满足，且令$\lambda_k=i\mu_k$，$k=1,2,\cdots$，因此就有$\mathrm{Im}\lambda_k>0$且

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}<+\infty \tag{1'}$$

首先我们介绍上半平面H^2空间（今后记作H^2_+）中的一些重要性质[5]。设$f(x)\in L^2[0,+\infty)$，则函数

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}f(x)e^{ixw}dx,\ I_m w>0 \tag{2}$$

属于H^2_+，即

$$\sup_{0<v<+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|F(u+iv)|^2du\right]^{\frac{1}{2}}<+\infty \tag{3}$$

且$F(w)$在实轴上几乎处处有角度边界值$F(u)$，

* 1983年2月15日收到。

$$F(u)=\underset{\sigma\to+\infty}{l.i.m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}f(x)\mathrm{e}^{ixu}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{iux}-1}{ix}f(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

及

$$\underset{\sigma\to+\infty}{l.i.m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}F(u)e^{-iux}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iux}-1}{-iu}F(u)\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}f(x),&0<x<+\infty\\0,&-\infty<x<0\end{cases} \tag{5}$$

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|F(u)|^2\mathrm{d}x \tag{6}$$

一般地，设$f(x)$与$g(x)\in L^2[0,+\infty)$通过（2）所确定的Fourier变换对应地为$F(w)$与$G(w)$，则成立下面的Parseval等式

$$\int_0^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)\overline{G(u)}\mathrm{d}u \tag{7}$$

此外，对于$F(w)\in H^2_+$，成立Cauchy公式：

$$F(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\xi)}{\xi-w}\mathrm{d}\xi,\quad \mathrm{Im}w>0\ . \tag{8}$$

我们还考虑Blaschke 乘积：

$$B_n(w)=\prod_{k=1}^{n}\frac{w-\lambda_k}{w-\overline{\lambda}_k}\frac{|1+\lambda_k^2|}{1+\lambda_k^2},\quad B(z)=\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{w-\lambda_k}{w-\overline{\lambda}_k}\frac{|1+\lambda_k^2|}{1+\lambda_k^2} \tag{9}$$

在条件（1′）下，虽然有[5]。

1° $B(w)\in H^2_+$； 2° $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n(w)B(w)$在$\mathrm{Im}w>0$上内闭一致地成立；

3° $|B(w)|<1,\mathrm{Im}w>0$ 且几乎处处地有$B(w)|=1$，$-\infty<u<+\infty$。

考虑函数空间$H^2_\pm\{\lambda_j\}$[6]：我们说$F(w)\in H^2_\pm\{\lambda_j\}$，若满足下列三个条件：

1° $F(w)\in H^2_+$； 2° $F(w)B(w)$ 在下半平面上属于H^2；

3° $\lim\limits_{\substack{w\to u\\ \mathrm{Im}w>0}}F(w)=\lim\limits_{\substack{w\to u\\ \mathrm{Im}w<0}}F(w)$在实轴$-\infty<u<+\infty$上几乎处处成立。

我们还引进函数空间$L^2(\lambda_j)$，我们说$f(x)\in L^2(\lambda_j)$，若$f(x)\in L^2[0,+\infty)$且由（2）所确定的Fourier 变换$F(w)\in H^2_\pm\{\lambda_j\}$。

定理1 [2]要使$f(x)\in L^2(0,+\infty)$能在此空间中被函数系$\{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}\}$的线性组合逼近的充要条件是$f(x)\in L^2\{\lambda_j\}$。

证 显然有

$$\frac{1}{w-\overline{\lambda}_k}=i\int_0^{+\infty}e^{i(w-\overline{\lambda}_k)x}\mathrm{d}x,\quad \mathrm{Im}w\geqslant0\ 。$$

由此通过积分号下求微商得到

$$\frac{(-1)^{S_k-1}(s_k-1)!}{(w-\overline{\lambda}_k)^{s_k}}=i\int_0^{+\infty}e^{-i\lambda_k x}(ix)^{s_k-1}\mathrm{d}x$$

即

$$h_k(w)\triangleq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{(s_k-1)!}{(w-\overline{\lambda}_k)^{Sk}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{iwx}(-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}\mathrm{d}x \tag{10}$$

设$F(w)\in H_+^2$，其逆Fourier变换记作$f(x)$，由（5）知，当$-\infty<x<0$时，$f(x)$几乎处处为零。由公式（10）与（6），对于任何的复数c_k，$1<k<n$，就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(u)-\sum_{k=1}^{n}c_kh_k(u)|^2\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}|f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k(-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}|^2\mathrm{d}x$$

已知在条件（1′）下，有理函数系$\{h_k(w)\}$在H_+^2中的闭包为$H_\pm^2\{\lambda_j\}$（见文章〔6〕中定理2.2），因此由上面不等式就得到函数系$\{e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}\}$在$L^2[0,+\infty)$中的闭包是$L^2(\lambda_j)$。证毕

定理2 若$f(z)\in L^2(\lambda_j)$，则由等式

$$\int_0^{+\infty}f(x)\overline{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}}\mathrm{d}x=0,n=1,2,\cdots, \tag{11}$$

可以推出$f(x)$在正实轴上几乎处处为零。此外，必存在函数$b(x)\in L^2[0,+\infty)$，它几乎处处不为零，但满足

$$\int_0^{+\infty}b(x)e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}\mathrm{d}x=0,n=1,2,\cdots, \tag{12}$$

证 设$f(x)\in L^2(\lambda_j)$，其Fourier 变换记作$F(w)\in H_\pm^2\{\lambda_j\}$，由（10）、（11）及Parseval等式（7）就得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{(s_k-1)!}{(u-\overline{\lambda}_k)^{s_k}}}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}f(x)\ \overline{(-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}}\mathrm{d}x=0,k=1,2,\cdots,$$

再利用H_+^2中Canchy公式（8），就得到$f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0,k=1,2,\cdots$.应用文章〔6〕中的唯一性定理2.1，就有$F(w)\equiv0$，由此从（5）得到$f(x)$在正实轴上几乎处处为零。

此外，对于Blaschke乘积，利用它在上半平面上的Cauchy公式，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}B(u)\overline{h_k(u)}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}B(u)\ \frac{(s_k-1)!}{(u-\lambda_k)^{s_k}}\mathrm{d}u=\sqrt{2\pi}\ iB^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0,$$

$k=1,2,\cdots$。

因而，利用（11）及Parseval等式（7），就有

$$\int_0^{+\infty}b(x)\overline{(-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}}\mathrm{d}x=0,k=1,2,$$

其中几乎处处地有

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}B(u)e^{-iux}\mathrm{d}u=\begin{cases}b(x),&0<x<+\infty,\\0,&-\infty<x<0.\end{cases}$$

$b(x)\in L^2[0,+\infty)$。显然$b(x)$几乎处处地不为零，否则利用Fourier变换，就会得到$B(u)\equiv 0$，这就会得到矛盾。证毕。

现在再给出空间$L^2(\lambda_j)$的另一个判别法。

定理 3 [2] 要使$L^2[0,+\infty)$中任意一个函数$f(x)$属于$L^2(\lambda_j)$的充要条件是，对于任意的$\xi, 0<\xi<+\infty$，有

$$\int_0^{+\infty} \overline{K^*(\xi,x)}\, f(x)\,\mathrm{d}x = 0\ ,\quad 0<\xi<+\infty, \tag{13}$$

其中

$$K^*(\xi,x) = \underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} B(\tau)\,\frac{e^{i\xi\tau}-1}{i\tau}e^{-ix\tau}\mathrm{d}\tau \tag{14}$$

而$B(w)$是由（9）所确定的Blaschke乘积。

证 首先，由于$B(w)\dfrac{e^{i\xi w}-1}{iw}\in H^2_+, 0<\xi<+\infty$，因此（14）右端当$-\infty<x<0$时，几乎处处为零，因而由（14）得到

$$B(\tau)\frac{e^{i\xi\tau}-1}{i\tau} = \underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sigma}K^*(\xi,x)e^{i\tau x}\mathrm{d}x,\ 0<\xi<+\infty \tag{15}$$

这样一来，设$f(x)\in L^2[0,+\infty)$，其Fourier变换记作$F(w)\in H^2_+$，利用（2），（15）及Parseval等式（7），就有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\overline{K^*(\xi,x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\overline{B(\tau)\frac{e^{i\xi\tau}-1}{i\tau}}\mathrm{d}\tau,\quad 0<\xi<+\infty.$$

注意到，当$-\infty<\tau<+\infty$时，有

$$\overline{B(\tau)} = \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{\tau-\overline{\lambda_k}}{\tau-\lambda_k}\ \frac{|1+\lambda_k^2|}{1+\overline{\lambda_k^2}} = \frac{1}{B(\tau)},$$

由上式得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\overline{K^*(\xi,x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\tau)}{B(\tau)}\ \frac{e^{-i\xi\tau}-1}{-i\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^{\xi}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\tau)}{B(\tau)}\ \frac{e^{-i\xi\tau}-1}{-i\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi, 0<\xi<+\infty, \tag{16}$$

这里用到了

$$\lim_{\xi\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\tau)}{B(\tau)}\ \frac{e^{-i\xi\tau}-1}{-i\tau}\mathrm{d}\tau = 0.$$

注意到$\dfrac{F(\tau)}{B(\tau)}\in L^2(-\infty,+\infty)$，因此令

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\tau)}{B(\tau)}\ \frac{e^{-i\xi\tau}-1}{-i\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{F(\tau)}{B(\tau)}\ e^{-i\xi\tau}\mathrm{d}\tau \in L^2(-\infty,+\infty)。 \tag{17}$$

有

$$\frac{F(\tau)}{B(\tau)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(\xi)\ \frac{e^{i\xi\tau}-1}{i\xi}\mathrm{d}\xi\ \right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\sigma}^{\sigma}g(\xi)\ e^{i\xi\tau}\,\mathrm{d}\xi \tag{18}$$

由（16）与（17）得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(x)\overline{K^{*}(\xi,x)}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\xi}g(\xi)\mathrm{d}\xi\ ,\qquad 0<\xi<+\infty \tag{19}$$

若$f(x)\in L^2[0,+\infty)$，则$F(w)\in H_{\pm}^2\{\lambda_j\}$，因而$\frac{F(w)}{B(w)}$在下半平面上属于$H^2$。因此由（17）与（5）知，$g(\xi)=0,\ 0<\xi<+\infty$。因而由（19）就得到了（13）。

反过来，若（13）成立，则由（19）知道，$g(\xi)=0,\ 0<\xi<+\infty$。因而由（18）就得到

$$\frac{F(\tau)}{B(\tau)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\sigma}^{0}g(\xi)e^{i\xi\tau}\mathrm{d}\tau。$$

这样一来，由（2）就知道函数$\frac{F(w)}{B(w)}$在下半平面属于H^2，这就表示$F(w)\in H_{\pm}^2\ \{\lambda_j\}$，即$f(x)\in L^2(\lambda_j\}$。证毕。

考虑函数系[3]

$$\Phi(w)=\sqrt{\frac{\mathrm{Im}\,\lambda}{\pi}}\ \frac{1}{w-\overline{\lambda}_1}\ ,\quad \Phi_n(w)=\sqrt{\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_n}{\pi}}\frac{1}{w-\overline{\lambda}_n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{w-\lambda_k}{w-\overline{\lambda}_k},\quad n=2,3,\cdots。$$

已知它是实轴上的规格化正交系。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n(n)\overline{\Phi_m\ (u)}\mathrm{d}u=\delta_{nm}=\begin{cases}1\ , & n=m\\ 0\ , & n\neq m\end{cases} \tag{20}$$

显然$\Phi_n(w)\in H_{+}^2$，考虑其逆Fourier变换：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n(u)\ e^{-ixu}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_n}{\pi}}\ \frac{1}{u-\overline{\lambda}_n}\ \prod_{k=1}^{n}\ \frac{u-\lambda_k}{u-\overline{\lambda}_k}e^{-ixu}\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}r_n(x)\ , & 0<x<+\infty\\ 0\ , & -\infty<x<0\end{cases} \tag{21}$$

显然，当$0<x<+\infty$时，若取C_R为半径为R的下半个园周，且其绕行方向为顺时针方向，则有

$$y_n(x)=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_R}\sqrt{\frac{\mathrm{Im}\lambda_n}{\pi}}\ \frac{1}{w-\overline{\lambda}_n}\prod_{k=1}^{n-1}\ \frac{w-\lambda_k}{w-\overline{\lambda}_k}e^{-ixw}\mathrm{d}\,w$$

设$\{E_k\}$是$\{u_k\}_1^n$中不同序列，且其出现次数为$p_k\ (n)$，则$z_k'=iz_k$必定$\{\lambda_k\}_1^n$中不同序列，其出现的次数也是$p_k(n)$，由上式，应用留数定理得到

$$y_n(x)=\frac{-2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\mathrm{Im}\lambda_n}{\pi}}\sum_{z'_k\in\{\lambda_k\}_1^n}\underset{w=z'_k}{\mathrm{Res}}\left(\frac{1}{w-\overline{\lambda_n}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{w-\lambda_k}{w-\overline{\lambda_k}}-e^{-ixw}\right)$$

$$=-\sqrt{2}\,i\sqrt{\mathrm{Im}\lambda_n}\sum_{z'_k\in\{\lambda_k\}_1^n}\frac{1}{(p_k(n)-1)!}\left[\frac{(w-\overline{z'_k})^{p_k(n)}}{w-\overline{\lambda_n}}\cdot\right.$$

$$\left.\prod_{k=1}^{n-1}\frac{w-\lambda_k}{w-\overline{\lambda_k}}e^{-ixw}\right]_{w=\overline{z'_k}}^{p_k(n)-1}=-\sqrt{2}\,i\sqrt{\mathrm{Im}\lambda_n}\sum_{z'_k\in\{\lambda_k\}_1^n}\frac{1}{(p_k(n)-1)!}\cdot$$

$$\sum_{l=0}^{p_k(n)-1}c_k e^{-i\overline{z'_k}x}(-ix)^l=-\sqrt{2}\,i\sqrt{\mathrm{Im}\lambda_n}\sum_{z'_k\in\{\lambda_k\}_1^n}\frac{1}{(p_k(n)-1)!}\cdot$$

$$\sum_{l=0}^{p_k(n)-1}c_k e^{-z_k x}(i\ x)^l$$

这表示$y_n(x)$是$\{e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}\}_1^n$的线性组合。

由（21），（20）及Parstval 等式（7）得到

$$\int_0^{+\infty}y_n(x)\overline{y_m(x)}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n(\tau)\overline{\Phi_m(\tau)}\,\mathrm{d}\tau=\delta_{nm}$$

因此$\{y_n(x)\}$是$L^2[0,+\infty)$上的规格化正交系。这样一来，对于任意的$f\in L^2(0,+\infty)$，其Fourier系数可以定义为

$$c_k(f)=\int_0^{+\infty}f(x)\overline{y_k(x)}\,\mathrm{d}x,\quad k=1,2,\cdots。$$

由定理1立刻可以得到

定理4 $f(x)\in L^2(\lambda_j)$的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)y_k(x)\right\|=0.$$

这表示$\{y_k(x)\}$是$L^2(\lambda_j)$中的基。

下面我们还要研究其他的基。为此引进函数[7]。

$$\Omega_n(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{B(w)}{(s_n-1)!\ (w-\lambda_n)^{p_n-s_n+1}}\sum_{v=0}^{p_n-s_n}a_v(\lambda_n)(z-\lambda_n)^v, \tag{22}$$

其中

$$a_v(\lambda_n)=\frac{1}{v!}\frac{\mathrm{d}^v}{\mathrm{d}w^v}\left(\frac{(w-\lambda_n)^{p_n}}{B(w)}\right)_{w=\lambda_n},\quad 0<v<p_n,\quad n=1,2,\cdots。$$

显然$\Omega_n(w)\in H_+^2$，现作其逆Fourier变换：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega_n(u)e^{-iux}du=\begin{cases}\omega_n(x), & 0<x<+\infty\\ 0, & -\infty<x<0\end{cases}, \tag{23}$$

$\omega_n(x)\in L^2[0,+\infty)$. 由（10），（23）及Parswal等式得到

$$\int_0^{+\infty}\omega_n(x)\overline{(-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega_n(u)\overline{h_k(u)}du$$

已知（可见〔7〕），$\{\Omega_n(u), h_k(u)\}$是实轴上双正交系。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega_n(u)\overline{h_k(u)}du=\delta_{nk},\quad n,k=1,2,\cdots。$$

因此 $\{w_n(x),\ (-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}\}$在正实轴上也是双正交系

$$\int_0^{+\infty}w_n(x)\overline{(-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}}dx=\delta_{nk},\quad n,k=1,2,\cdots.$$

现在研究 $\{e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}\}$ 及 $\{w_n(x)\}$ 作为$L^2(\lambda_j)$ 中基的问题。

类似于文章〔6〕，也可以定义 $\{\mu_n\}$，$\mathrm{Re}\mu_n>0$属于$\Delta(P)$；我们说 $\{\mu_n\}\in\Delta(p)$，$\mathrm{Re}\mu_n>0$，如果满足

$$1°\ \inf_{k\geq 1}\prod_{\substack{j=1\\ \mu_j\neq\mu_k}}^{+\infty}\left|\frac{\mu_k-\mu_j}{\mu_k+\mu_j}\right|>\delta>0,\qquad 2°\ \sup\{p_k\}=p<+\infty$$

此时就有

$$\inf_{k\geq 1}\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^{+\infty}\left|\frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\bar{\lambda}_j}\right|>\delta>0$$

定理 5 1° 要使 $\{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}\}$是$L^2(\lambda_j)$中的基的充要条件是$\{\mu_n\}\in\Delta(p)$；2° 要使 $\{\omega_n(x)\}$是$L^2(\lambda_j)$ 中基的充要条件是 $\{\mu_n\}\in\Delta(p)$。

证 由〔6〕中定理4.1 知，要使 $\{h_k(w)\}$ 是$H^2_+\{\lambda_j\}$中的基，即对任意的$F(w)\in H^2_\pm\{\lambda_j\}$，成立

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|F(w)-\sum_{k=1}^{n}b_k(F)h_k(w)\right\|=0, \tag{24}$$

其中

$$b_k(F)=\sum\int_{-\infty}^{+\infty}b_k(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)\overline{\Omega_k(u)}du, \tag{25}$$

的充要条件是 $\{\lambda_k\}\in\Delta(p)$，即 $\{\mu_k\}\in\Delta(p)$，由于$H^2_\pm\{\lambda_j\}$ 通过Fourier变换与$L^2\{\lambda_j\}$ 同构，设$F(w)$对应着$f(x)$，则由（24）及（10），（6）得到

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}b_k(f)(-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}\right\|=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|f(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}d_k(f)\ e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}\ \right\|=0,$

由（25）及Parseval等式得到

$$d_k(f)=\ (-1)^{s_k-1}i^{s_k}b_k(f)=\ (-1)^{s_k-1}i^{s_k}\ \int_0^{+\infty}f(x)\overline{w_k(x)}\mathrm{d}x \tag{26}$$

这就证明了1°。

由〔6〕中定理5.2 知，要使 $\{\Omega_k(w)\}$ 是 $H^2_\pm\ \{\lambda_j\}$ 中的基,即对任意的 $G(w)\in H^2_\pm\ \{\lambda_j\}$，成立

$$\lim_{n\to+\infty}\|G\ (w)\ -\sum_{k=1}^{n}e_k(G)\ \Omega_k(w)\|=0, \tag{27}$$

其中

$$e_k(G)\ =\int_{-\infty}^{+\infty}G\ (u)\ \overline{h_k(u)}\mathrm{d}u \tag{28}$$

的充要条件是 $\{\lambda_k\}\in\Delta(p)$，即 $\{\mu_k\}\in\Delta(p)$，同样由于 $H^2_\pm\ \{\lambda_j\}$ 通过Fourier变换与 $L^2\{\lambda_j\}$ 同构，设 $G(w)$ 对应着 $g(x)$，则由（27），（23）及（6）得到

$$\lim_{n\to+\infty}\|g(x)-\sum_{k=1}^{n}a_k(g)\,\omega_k(x)\|=0$$

其中由（28）及Parseval等式得到

$$a_k(g)=e_k(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}g\ (x)\overline{(-1)^{s_k-1}i^{s_k}e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}}\mathrm{d}x$$

$$=-i^{s_k}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\overline{e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}}\mathrm{d}x \tag{29}$$

这就证明了 2°。

现在我们研究矩量问题在 $L^2[0,+\infty)$ 中的解：

$$(\mathrm{A})\quad \int_0^{+\infty}g(x)\overline{e^{-\mu_n x}x^{s_n-1}}\mathrm{d}x=a_n,\ n=1,2,\cdots, \tag{30}$$

$$(\mathrm{B})\quad \int_0^{+\infty}f(x)\overline{\omega_n(x)}\mathrm{d}x=b_n,\ n=1,2,\cdots, \tag{31}$$

定理6 设 $\{\mu_n\}\in\Delta(p)$，则要使矩量问题（A）在 $L^2\{\lambda_j\}$ 中有唯一解 $g_0(x)\in L^2\{\lambda_j\}$ 的充要条件为

$$\|a_k\|_{\{\mu_j\}}=\ \left\{\sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{Re}\mu_k)^{2(s_k-1)+1}\ |a_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty \tag{32}$$

此时，其解为

$$g_0(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-i^{s_k}}{\sqrt{2\pi}\ i}a_k\omega_k(x) \tag{33}$$

$$\|g_0\| < c(\delta, p)\|a_k\|_{\{\mu_j\}} \tag{34}$$

其中$c(\delta、p)$为常数，（33）中级数在$L^2[0, +\infty)$中收敛。

证 必要性 设$g(x)\in L^2[0, +\infty)$是（A）的解，其Fourier变换为$G(w)\in H_+^2$，则由（10）及Parseval等式与Cauchy积分公式得到

$$\sqrt{2\pi}\,i\ G^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(s_k-1)!}{(u-\bar{\lambda}_k)^{s_k}}du$$

$$= \int_0^{+\infty} g(x)\overline{(-1)^{s_k-1} i^{s_k} e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}}dx = -i^{s_k} a_k \tag{35}$$

由〔6〕中定理3.1 知

$$\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(\operatorname{Im}\lambda_k)^{2(s_k-1)+1}|G^{(s_k-1)}(\lambda_k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} < A(\delta, p)\|G\| = A(\delta, p)\|g\| \tag{36}$$

其中$A(\delta、p)$为常数。由此从（35）及（36）就立刻得到（32）、

充分性 设（32）成立，即 $\|a_k\|_{\{\mu_k\}} = \left\{\sum_{k=1}^{+\infty}(\operatorname{Im}\lambda_k)^{2(s_k-1)+1}|a_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty$,

因此由〔6〕中定理5.1知，存在唯一函数$G_0(w)\in H_\pm^2\{\lambda_j\}$，满足插值条件

$$G_0^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \frac{-i^{s_k}}{\sqrt{2\pi}\,i}a_k, \quad k=1,2,\cdots。 \tag{37}$$

$$G_0(w) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-i^{s_k}}{\sqrt{2\pi}\,i}a_k\Omega_k(w) \tag{38}$$

且

$$\|G_0(w)\| < B(\delta, p)\|a_k\|_{\{\mu_j\}} \tag{39}$$

其中收敛是在$H^2(\operatorname{Im}w>0)$中成立。

设$G_0(w)$的逆Fourier变换为$g_0(x)\in L^2[0, +\infty)$，则由（38）得到（33），且由（37）及Parseval等式得到

$$\int_0^{+\infty} g_0(x)\overline{e^{-\mu_k x}x^{s_k-1}}dx = \frac{-1}{i^{s_k}}\int_0^{+\infty} g_0(x)\ \overline{(-1)^{s_k-1} i^{s_k} e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}}dx$$

$$= \frac{-1}{i^{s_k}}\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{(s_k-1)!}{(u-\lambda_k)^{s_k}}du$$

$$= \frac{-\sqrt{2\pi}\,i}{i^{s_k}}G_0^{(s_k-1)}(\lambda_k) = a_k$$

此外，由（39）还可以得到（34），证毕。

定理 7 设$\{\mu_n\}\in\Delta(p)$，则要使矩量问题（B）在$L^2\{\lambda_j\}$中有唯一解$f_0\in L^2\{\lambda_j\}$

的充要条件是

$$\|b_k\|^{\{\mu_j\}}=\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{Re}\mu_k)^{-2(s_k-1)-1}|b_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty \tag{40}$$

此时，其解为

$$f_0(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{s_k-1}i^{s_k}b_k e^{-\mu_k x}x^{s_k-1} \tag{41}$$

且

$$\|f_0\|\leqslant D(\delta,p)\|b_k\|^{\{\mu_j\}} \tag{42}$$

其中$D(\delta、p)$为常数，级数（41）在$L^2[0,+\infty)$中收敛。

证．必要性 设$f(x)\in L^2[0,+\infty)$是（B）的解，其Fourier变换为$F(w)\in H_+^2$，则由Parseval 等式得到

$$|b_k|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F(u)}\Omega_k(u)\,\mathrm{d}u\right|=\left|\sum_{v=0}^{p_k-s_k}\frac{a_v(\lambda_k)}{(s_k-1)!}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{F(u)}B(u)}{u(u-\lambda_k)^{p_k-s_k-v+1}}\mathrm{d}u\right|$$

$$\leqslant\sum_{v=0}^{p_k-s_k}\frac{2\pi|a_v(\lambda_k)|}{(S_k-1)!\,(p_k-s_k-v)!}|\widetilde{F}^{(p_k-s_k-v)}(\lambda_k)| \tag{43}$$

其中 $\widetilde{F}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{F(\xi)B(\xi)}}{\xi-w}\mathrm{d}\xi$，$\mathrm{Im}\,w>0$，

$\widetilde{F}(w)\in H_+^2$，且由Riesz不等式（见〔5〕），有

$$\|\widetilde{F}(w)\|\leqslant c\|\overline{F(\xi)}B(\xi)\|=c\|F(w)\| \tag{44}$$

由〔6〕中引理3.3，可得到估计式

$$|a_v(\lambda_k)|\leqslant a(\delta,p)(\mathrm{Im}\,\lambda_k)^{p_k-v},\quad 0\leqslant v\leqslant p_k,\quad 1\leqslant k<+\infty \tag{45}$$

其中$a(\delta,p)$为常数。

这样一来，由（44），（45）及（43）得到

$$\|b_k\|^{\{\mu_j\}}=\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{Re}\mu_k)^{-2(s_k-1)-1}|b_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\Big[\sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{Re}\mu_k)^{-2(s_k-1)-1}(2\pi)^2a^2(\delta,p)\cdot$$

$$\Big\{\sum_{v=0}^{p_k-s_k}\frac{(\mathrm{Im}\,\lambda_k)^{p_k-v}}{(s_k-1)!(p_k-s_k-v)!}|\widetilde{F}^{(p_k-S_k-v)}(\lambda_k)|\Big\}^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\Big[\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi)^2a^2(\delta,p)\Big\{\sum_{v=0}^{p_k-s_k}(\mathrm{Im}\,\lambda_k)^{p_k-s_k-v+\frac{1}{2}}|\widetilde{F}^{(p_k-s_k-v)}(\lambda_k)|\Big\}^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\beta(a,p)\|\widetilde{F}\|=c\beta(a,p)\|F\|=c\beta(a,p)\|f\|, \tag{46}$$

其中$\beta(a,p)$为常数，而最后一个不等式是利用〔6〕中引理3.4 才得到的。

充分性 现在证明级数$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k h_k(w)$在$H_+^2$上平均收数。为此，考虑

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} b_k h_k(w)\right\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{g\in L^2(-\infty,+\infty)\\ \|g\|<1}} \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{m} b_k h_k(u)\right)\overline{g(u)}\,du\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname*{Sup}_{\substack{g\in L^2\\ \|g\|<1}} \left|\sum_{k=n}^{m} b_k \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{g(u)}\,(s_k-1)!}{(u-\lambda_k)^{s_k}}\,du\right|$$

$$= \sqrt{2\pi}\operatorname*{Sup}_{\substack{\|g\|<1\\ g\in L^2}} \left|\sum_{k=n}^{m} b_k G^{(s_k-1)}(\lambda_k)\right|$$

其中$G(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{g(\xi)}}{\xi-w}d\xi$，$I_m w>0$，且由Riegz定理（见〔5〕），有

$$\|G(w)\|<C\|g(\xi)\|<C$$

这样一来，由上式得到

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} b_k h_k(w)\right\| < \sqrt{2\pi}\operatorname*{Sup}_{\substack{G\in H_+^2\\ \|G\|<C}} \sum_{k=n}^{m} |b_k|(\mathrm{Im}\lambda_k)^{-(s_k-1)+\frac{1}{2}}(\mathrm{Im}\lambda_k)^{(s_k-1)+\frac{1}{2}}|G^{(s_k-1)}(\lambda_k)|$$

$$<\sqrt{2\pi}\left[\sum_{k=n}^{m}|b_k|^2(\mathrm{Im}\lambda_k)^{-2(s_k-1)-1}\right]^{\frac{1}{2}}\operatorname*{Sup}_{\substack{G\in H_+^2\\ \|G\|<C}}\left[\sum_{k=n}^{m}(\mathrm{Im}\lambda_k)^{2(s_k-1)+1}\cdot\right.$$

$$\left.|G^{(s_k-1)}(\lambda_k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \gamma(\delta,p)\operatorname*{Sup}_{\substack{G\in H_+^2\\ \|G\|<C}}\|G\|\left[\sum_{k=n}^{m}|b_k|^2(\mathrm{Im}\lambda_k)^{-2(s_k-1)-1}\right]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \quad (43)$$

这里用到了文章〔6〕中定理3.1及（40）。

因此级数$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k h_k(w)$在$H_+^2$上平均收敛，其极限函数记作$F_0(w)\in H_+^2$。利用$h_k(w)\in H_\pm^2\{\lambda_j\}$，容易看出$F_0(w)\in H_\pm^2\{\lambda_j\}$（例如参看〔6〕中定理2.2）。由（43）还可以看出

$$\|F_0(w)\| = \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} b_k h_k(w)\right\| < \sqrt{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2(\mathrm{I_m}\lambda_k)^{-2(S_k-1)-1}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{G\in H_+^2\\ \|G\|<C}}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{Im}\lambda_k)^{2(s_k-1)+1}|G^{(s_k-1)}(\lambda_k)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$<\gamma(\delta,p)\operatorname*{Sup}_{\substack{G\in H_+^2\\ \|G\|<C}}\|G\|\cdot\|b_k\|^{\{\mu_j\}}<C\gamma(\delta,p)\|b_k\|^{\{\mu_j\}} \quad (44)$$

设$F_0(w)$的逆Fourier变换为$f_0(x)\in L^2\{\lambda_j\}$，则有

$$f_0(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(-1)^{s_k-1} i^{s_k} e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}; \quad (45)$$

且由（13）得$\|f_0(x)\| < C\gamma(\delta, p)\|b_k\|^{\{\mu_j\}}$。此外，有

$$\int_0^{+\infty} f_0(x)\overline{w_a(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} b_k(-1)^{s_k-1} i^{s_k} e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\overline{w_n(x)}\,dx = b_k,$$

这里用到了$\{w_n(x),\ (-1)^{s_k-1} i^{s_k} e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}$的双正交性。证毕。

参 考 文 献

〔1〕Н. Винер и Р. Пэли, Преобразование фурье в комплексной области, "Наука" М., 1964.

〔2〕М. М. Джрбашян, О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}$, ДАН СССР 141:3 (1961), 539—542.

〔3〕М. М. Джрбащян, О пополнении одной неполной системы, ДАН Арм. ССР 35:3 (1962), 97—105.

〔4〕М. М. Джрбашян, Унитарные пары операторов, их аналитическая характеристика в пространстве L_ν〔a, b〕, ДАН 141:2 (1961), 281—284.

〔5〕P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, Acad. press N. Y. and London, 1970.

〔6〕М. М. Джрбащян, Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Матем. Сборник, 42:6 (1978), 1322—1384.

〔7〕М. М. Джрбашян, Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра коши на вещественной оси, Матем. сборник, 95 (137): 3 (11) (1974), 418—444.