随机中止试验的线性模型中参数估计的几个性质

林　正　炎

(杭州大学)

考虑（p维）线性回归模型

$$Y_i = x_i'\beta + e_i, \quad i=1,2,\cdots \tag{1}$$

其中 $\{e_i\}$ 是相互独立同分布随机变量序列，$Ee_1=0$，$\mathrm{Var}\ e_1=\sigma^2$，$0<\sigma^2<\infty$。本文考虑有关它的两个主要参数——误差方差 σ^2 和回归系数 β 的估计的一些主要性质向容量随机的线性模型的转移问题。记

$X_n=(x_1,\cdots,x_n)'$，$r_n=\mathrm{rk}(X_n)$，　$Y(n)=(Y_1,\cdots,Y_n)'$，$e(n)=(e_1,\cdots,e_n)'$.

一、σ^2的估计量的性质：

σ^2 的基于残差平方和的估计量为

$$\hat{\sigma}^2(n)=\frac{1}{n-r_n}Y(n)'\{I_n-X_n(X_n'X_n)^-X_n'\}Y(n)=\frac{1}{n-r_n}\{\sum_{j=1}^n e_j^2-\sum_{i=1}^{r_n}(\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(n)}e_j)^2\} \tag{2}$$

此处 $(a_{ij}^{(n)})$ 是 n 阶实正交方阵。设 $\{v_n\}$ 是取大于 p 的正整值且与 $\{e_i\}$ 定义在同一概率空间上的随机变量序列.

定理1　假设$v_n\xrightarrow{P}\infty$且对任意的n，(e_i,e_j,v_n) $(i\neq j, i,j=1,2,\cdots)$ 有相同的分布，那么$\hat{\sigma}^2(v_n)$ 是 σ^2 的渐近无偏估计。

证　固定 n，以 $(p<)\,b_1<b_2<\cdots$记v_n的一切可能值．由（2）式和定理的条件，

$$E\hat{\sigma}^2(v_n)=\sum_{l=1}^\infty E\Big\{\frac{1}{b_l-r_{b_l}}\Big(\sum_{j=1}^{b_l}e_j^2-\sum_{i=1}^{r_{b_l}}\big(\sum_{j=1}^{b_l}a_{ij}^{(b_l)}e_j\big)^2\Big)\ \Big|\ v_n=b_l\Big\}P(v_n=b_l)$$

$$=\sum_{l=1}^\infty E(e_1^2\,|\,v_n=b_l)p(v_n=b_l)$$

$$-\sum_{l=1}^\infty\frac{1}{b_l-b_{b_l}}\Big(\sum_{i=1}^{r_{b_l}}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{b_l}a_{ij}^{(b_l)}a_{ik}^{(b_l)}\Big)E(e_1e_2\,|\,v_n=b_l)P(v_n=b_l).$$

上式右端的第一个和式恰为 $Ee_1^2=\sigma^2$；而第二个和式的绝对值不超过

$s_n=\sum_{l=1}^\infty\frac{p}{b_l-r_{b_l}}E(|e_1e_2|\,\|\,v_n=b_l)P(v_n=b_l)$．因 $v_n\xrightarrow{P}\infty$，所以对任给的$\varepsilon>0$，只要n充分大，存在 m_n，使得

$$b_{m_n}-p>\frac{1}{\varepsilon}\ \text{且}\ \int_{\{v_n<b_{m_n}\}}e_1^2\mathrm{d}P<\varepsilon$$

* 1983年1月17日收到．中国科学院科学基金资助的课题．

由定理的条件也有 $\int_{\{v_n<b_{m_n}\}} e_2^2 \mathrm{d}P<\varepsilon$. 于是

$$s_n=\left(\sum_{l=1}^{m_n}+\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\right)\frac{p}{b_l-r_{b_l}}E(|e_1e_2\|v_n=b_l)P(v_n=b_l)\leqslant p\varepsilon(1+\sigma^2).$$

由 ε 的任意性就证明了$\widehat{\sigma}^2(v_n)$ 的渐近无偏性.

再来考虑$\widehat{\sigma}^2(v_n)$ 的相合性和渐近正态性. 由 Gleser〔1〕, $\sigma^2(n)$ 是σ^2的强相合估计, 所以利用 Richter〔2〕的定理1和2, 当 $v_n\xrightarrow{a.s.}\infty$时, $\widehat{\sigma}^2(v_n)$ 仍是 σ^2 的强相合估计; 而当 $v_n\xrightarrow{P}\infty$时, $\widehat{\sigma}^2(v_n)$是 σ^2的弱相合估计. 关于渐近正态性, 作为〔3〕中的一个特例, 我们已经证明了在 $\frac{v_n}{n}\xrightarrow{P}\lambda$ (正值随机变量) 的条件下, 如果 $a_4\widehat{=}Ee_1^4<\infty$, 就有 $\frac{\sqrt{v_n}(\widehat{\sigma}^2(v_n)-\sigma^2)}{\sqrt{a_4}}\xrightarrow{d}N(0,1)$. 我们来给出收敛速度。

定理2 假设 v_n是任意满足下列条件的正整值随机变量: 与 $\{e_i\}$ 独立, 存在常数 $0<\tau'<\tau$,

$$P\left(\left|\frac{v_n}{n}-\tau\right|\geqslant\tau'\right)=o(n^{-\frac{3}{8}}),\qquad (3)$$

则有

$$\sup_x\left|P\left\{\sqrt{\frac{v_n}{a_4}}(\widehat{\sigma}^2(v_n)-\sigma^2)<x\right\}-\phi(x)\right|=o(n^{-\frac{3}{8}}).\qquad (4)$$

证 记 $\beta_n'=\sup\limits_{1<i<r_n}E\left\{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(n)}e_j\right)^6 I\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(n)}e_j\right|\geqslant n^{\frac{1}{32}}\right)\right\}\quad(=o(1))$, $\beta_n=\beta_n'\vee n^{-\frac{1}{4}}$.

写

$$\sup_x\left|P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_4}}(\widehat{\sigma}^2(n)-\sigma^2)<x\right\}-\phi(x)\right|$$

$$\leqslant\sup_x\left|P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_4}}\frac{1}{n-r_n}\sum_{j=1}^n\left(e_j^2-\frac{n-r_n}{n}\sigma^2\right)<x\right\}-\phi(x)\right|$$

$$+P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_4}}\frac{1}{n-r_n}\sum_{j=1}^{r_n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(n)}e_j\right)^2\geqslant\beta_n^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}\right\}+O(\beta_n^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}).\qquad (5)$$

利用 Berry - Esseen 定理, 并注意到 $r_n\leqslant P$, 容易险证上式右端第一项为$O(n^{-\frac{1}{2}})$. 第二项的估计可由

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(n)}e_j\right)^2\geqslant\beta_n^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}\right\}$$

$$\leqslant\beta_n^{-\frac{3}{4}}n^{-\frac{3}{8}}E\left\{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(n)}e_j\right)^6 I\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(n)}e_j\right|\geqslant\beta_n^{\frac{1}{8}}n^{\frac{1}{16}}\right\}\leqslant\beta_n^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}$$

得出。由此即有(5)式左端等于$o(n^{-\frac{3}{8}})$.

记整数集 $K_n=\{k:[n(\tau-\tau')]\leqslant k\leqslant[n(\tau+\tau')]\}$. 由定理的条件有

$$\sup_x\left|P\left\{\sqrt{\frac{v_n}{a_4}}(\widehat{\sigma}^2(v_n)-\sigma^2)<x\right\}-\phi(x)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k\in K_n}\sup_x\left|P\left\{\sqrt{\frac{k}{a_4}}(\widehat{\sigma}^2(k)-\sigma^2)<x\right\}-\phi(x)\right|P(v_n=k)+o(n^{-\frac{3}{8}})=o(n^{-\frac{3}{8}}).$$

如果适当强化条件(3), 则可将定理2中的 $\{v_n\}$ 与 $\{e_i\}$ 独立的条件去掉.

定理3 设 v_n 是任意满足下列条件的取大于 p 的正整值的随机变量: 存在数列ε_n 和常

数 $\tau>0$，使得对某 $0<\delta\leqslant 1$, $n^{-\delta}\leqslant\varepsilon_n\downarrow 0$，且

$$P\{|\frac{\nu_n}{n}-\tau|\geqslant\varepsilon_n\}=o_n\hat{=}\begin{cases}O(\varepsilon_n^{\frac{1}{2}}), & 0<\delta\leqslant\frac{1}{2},\\ o(\varepsilon_n^{a}), & \frac{1}{2}<\delta\leqslant 1,\end{cases}\quad\left(a=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<\delta\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8\delta}, & \frac{1}{2}<\delta\leqslant 1\end{cases}\right)\tag{6}$$

则有

$$\sup_x|P\{\sqrt{\frac{\nu_n}{\alpha_4}}(\hat{\sigma}^2(\nu_n)-\sigma^2)<x\}-\phi(x)|=o_n,\tag{7}$$

$$\sup_x|P\{\sqrt{\frac{n\tau}{\alpha_4}}(\hat{\sigma}^2(\nu_n)-\sigma^2)<x\}-\phi(x)|=o_n.\tag{8}$$

证 在条件（6）下，由（7）推出（8）是方便的，所以我们只对（7）式给出证明．在$\alpha_6<\infty$的条件下，类似于陈希孺〔4〕的引理1和2的证明，我们可以得到对一切形如$X=\sum_{j=1}^{n}a_je_j$（$\sum_{j=1}^{n}a_j^2=1$）的随机变量类，一致地成立

$$\lim_{b\to\infty}b^6P(|X|\geqslant b)=0.\tag{9}$$

当$a<\frac{1}{2}$时，记$0<\omega<\frac{1}{4}-\frac{a}{2}$，$b_n=\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}-\omega}\varepsilon_n^{\frac{a}{2}}(\uparrow\infty)$，　$\gamma'_n=b_n^6P(|X|\geqslant b_n)$．又记

$$\gamma_n=\begin{cases}1, & a=\frac{1}{2}\\ \gamma'_n\vee n^{-8\omega}, & 0<a<\frac{1}{2}.\end{cases}$$ 我们有

$$\begin{aligned}&\sup_x|P\{\sqrt{\frac{\nu_n}{\alpha_4}}(\hat{\sigma}^2(\nu_n)-\sigma^2)<x\}-\phi(x)|\\ \leqslant&\sup_x|P\{\sqrt{\frac{\nu_n}{\alpha_4}}\frac{1}{\nu_n-r_{\nu_n}}\sum_{j=1}^{\nu_n}(e_j^2-\frac{\nu_n-r_\nu}{\nu_n}\sigma^2)<x\}-\phi(x)|\\ &+P\Big\{\sqrt{\frac{\nu_n}{\alpha_4}}\frac{1}{\nu_n-r_{\nu_n}}\sum_{i=1}^{r_{\nu_n}}\Big(\sum_{j=1}^{\nu_n}a_{ij}^{(\nu_n)}e_j\Big)^2\geqslant\gamma_n^{\frac{1}{4}}\varepsilon_n^a\Big\}+O(\gamma_n^{\frac{1}{4}}\varepsilon_n^a).\end{aligned}\tag{10}$$

由〔5〕并注意到$r_{\nu_n}\leqslant p$，可知上式右端第一项为o_n．为估计第二项，记$K_n=\{k:[n(\tau-\varepsilon_n)]\leqslant k\leqslant[n(\tau+\varepsilon_n)]\}$．有

$$\begin{aligned}&P\Big\{\frac{1}{\sqrt{\nu_n}}\Big(\sum_{j=1}^{\nu_n}a_{ij}^{(\nu_n)}e_j\Big)^2\geqslant\gamma_n^{\frac{1}{4}}\varepsilon_n^a\Big\}\leqslant P\Big\{\max_{k\in K_n}|\sum_{j=1}^{k}a_{ij}^{(k)}e_j|\geqslant n^{\frac{1}{4}}(\tau-\varepsilon_n)^{\frac{1}{4}}\gamma_n^{\frac{1}{8}}\varepsilon_n^{\frac{a}{2}}\Big\}+o_n\\ &\leqslant O(n\varepsilon_n\gamma_n(n^{\frac{1}{4}}\gamma_n^{\frac{1}{8}}\varepsilon_n^{\frac{a}{2}})^{-6})+o_n=o_n.\end{aligned}$$

定理证毕．

注 利用〔6〕中的想法，定理的结论还可能加强．当e_i为有界的随机变量时，关于独立同分布序列的随机和的正态逼近速度可直接推广到误差方差的情形中来。也即此时定理中的ε_n只需满足$n^{-1}\leqslant\varepsilon_n\downarrow 0$，而$o_n=O(\varepsilon_n^{\frac{1}{2}})$．

二、β的最小二乘估计的性质

$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_p)'$的最小二乘估计为$\hat{\beta}(n)=(X'_nX_n)^{-}X'_nY$．类似于定理1，成立

定理4 假设$\nu_n\xrightarrow{P}\infty$且对任意固定的$n$，$(e_i,\nu_n)$（$i=1,2,\cdots$）有相同的分布，那么$\hat{\beta}(\nu_n)$是$\beta$的无偏估计．

关于$\widehat{\beta}(\nu_n)$的相合性，因据〔7〕，在条件$\lim\limits_{n\to\infty}(X'_n X_n)^- = 0$之下，$\widehat{\beta}(n)\to\beta\,(a.s.)$，因此有类似于前面的关于$\widehat{\sigma}(\nu_n)$的相合性的说明．下面来讨论它的渐近正态性．以$t_i(n)$记$(X'_n X_n)^-$的第$i$行．可写$\widehat{\beta}_{i}(n)-\beta_i = t'_i(n)X'_n e(n) \triangleq \sum\limits_{j=1}^{n} u_{ij}^{(n)} e_j$，有$\sum\limits_{j=1}^{n} u_{ij}^{(n)2} = (X'_n X_n)^-_{ii}$．由〔8〕，在条件

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n} u_{ij}^{(n)2} \Big/ \sum_{j=1}^{n} u_{ij}^{(n)2} = 0 \tag{11}$$

之下即有

$$(\widehat{\beta}_i(n)-\beta_i)/\sigma\Big(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^{(n)2}\Big)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{12}$$

定理5 假设线性模型（1）除了满足条件（11）外还满足：对任意的正整数k，$k+1\leqslant j\leqslant n$，

$$u_{i,j-k}^{(n)}/u_{ij}^{(n)} \to 1,\ n\to\infty, \tag{13}$$

则对任意的离散正值随机变量λ，记$\nu_n=[n\lambda]$，成立

$$(\widehat{\beta}_i(\nu_n)-\beta_i)/\sigma\Big(\sum_{i=1}^{\nu_n} u_{ij}^{(\nu_n)2}\Big)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{14}$$

证 为方便计，只讨论$i=1$的情形．记$U_n^2 \triangleq \sum\limits_{j=1}^{n} u_{1j}^{(n)2}$，$T_n(e_1,\cdots,e_n)\triangleq U_n^{-1}(\widehat{\beta}_1(n)-\beta_1)=U_n^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n} u_{1j}^{(n)} e_j$．由（11）和（13），不难验证

$$T_n(e_1,\cdots,e_n)-T_n(e_{k+1},\cdots,e_{k+n}) \xrightarrow{P} 0.$$

此外序列$\{e_n\}$的不变σ-域显然是平凡的，所以由〔9〕之定理6即知（12）中的收敛性是“混合”的。如此，若记λ的全体可能值为$0<l_1<l_2<\cdots$，事件$A_k=\{\lambda=l_k\}$，

$$P\{(\sigma U_{\nu_n}^{-1})\sum_{j=1}^{\nu_n} u_{1j}^{(\nu_n)} e_j < x\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{(\sigma U_{[nl_k]})^{-1}\sum_{j=1}^{[nl_k]} u_{1j}^{([nl_k])} e_j < x \mid A_k\} P(A_k).$$

由混合性及（12），

$$\lim_{n\to\infty} P\{(\sigma U_{[nl_k]})^{-1}\sum_{j=1}^{[nl_k]} u_{1j}^{([nl_k])} e_j < x \mid A_k\} = \lim_{n\to\infty} P\{(\sigma U_{[nl_k]})^{-1}\sum_{j=1}^{[nl_k]} u_{1j}^{([nl_k])} e_j < x\} = N(0,1).$$

这就证明了（14）．

如何减弱定理5对ν_n的限制和条件（13）是一个有兴趣的问题．

参 考 文 献

〔1〕Gleser, L. J., Correction on the asymptotic theory of fixed size sequential confidence bounds for linear regr ssion parametes, Ann. Math. Statist., 37 (1966), 1053-1055.

〔2〕Richter, W., перенесение предельных закономерностей для последовательностей случайных величин на последовательности со случайными индексами, Теория вероят. и её примен., 10 (1965), 82—93.

〔3〕陆传荣，林正炎，随机指标随机元序列的弱收敛性.（已投《数学进展》）.

〔4〕陈希孺，误差方差估计的不变原理，科学通报，数理化专辑（1980），81—85.

〔5〕Landers, D. & Rogge, L., The exact approximation order in the central limit theorem fot random summation, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 36（1976），269－283.

〔6〕林正炎，相依样本时线性模型中误差方差估计的不变原理，科学通报，29（1984），584—588.

〔7〕Lai. T. L., Robbins, H. and Wei, C. Z., Strong consistency of least sguares estimates inmultiple regression Ⅱ, J. Multivariate Anal. 9 (1979), 343—362.

〔8〕Eicker, F., Central limit theorems for families of sequences of random variables, Ann. Math. Statist., 34（1963），439—456.

〔9〕Eagleson, G. K., Some simple conditions for limit theorems to be mixing, Теория вероят. и её лримен., 21（1979），653—660.

Some Properties of Parametric Estimates in Linear Models with Randomly Stopped Test

Lin Zhengyan

(Hangzhou University)

When sample size is a sequence of r.v., the parametric estimates in linear models are interesting both theoretically and practically. For linear models

$$Y_i = x_i\beta + e_i \ , \quad i = 1,\ 2,\ \cdots$$

where $\{e_i\}$ are p-dimensional i.i.d.r.v.'s with $Ee_1 = 0$. Var $e_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. we consider estimate $\hat{\sigma}^2(\nu_n)$ of error variance σ^2 and least squares estimate $\hat{\beta}(\nu_n)$ of regression coefficient β, here $\{\nu_n\}$ is a sequence of r.v. with positve integers larger than p. In this paper some properties of estimates are discussed. Those are unbiasedness, consistency and normality. For $\hat{\sigma}^2(\nu_n)$, we also obtain some orders for convergence to normal distribution.