环的中心幂等元与Boolean代数的表示*

李会师

（陕西师范大学数学系）

本文拟给出Boolean 代数另一完全不同于Stone 表示［1］的表示。文中所讨论的环均指结合环。

设A是一个有单位元1的半素环（即A不含非零幂零理想）。令E(A) 是A的所有中心幂等元的集合。在E(A)中定义

$$e_1\circ e_2=e_1-e_1e_2,\quad e_1,e_2\in E(A)$$

则易知$\circ$是E(A) 上一个代数运算。又$\forall e,e_1,e_2\in E(A)$，令

$$e^c=1\circ e,\qquad e_1\wedge e_2=e_1\circ(e_1\circ e_2),$$

$$e_1\vee e_2=(e_1^c\wedge e_2^c)^c,\quad e_1\dotplus e_2=(e_1\circ e_2)\vee(e_2\circ e_1)$$

称e^c为e在E(A) 中的补元，而分别称$e_1\wedge e_2$，$e_1\vee e_2$，$e_1\dotplus e_2$为e_1和e_2在E(A) 中的交，并和对称差。此外，定义

$$e_1\leqslant e_2\Leftrightarrow e_1-e_1e_2=e_1\circ e_2=0,$$

那么易知$\leqslant$是E(A) 上一个偏序关系，且0和1分别是E(A) 中的最小元和最大元。

定理1　在序关系$\leqslant$下，$L(E(A))=\langle E(A);\wedge,\vee,0,1\rangle$是一个Boolean 代数；$R(E(A))=\langle E(A);\dotplus,\wedge,0,1\rangle$是一个有单位元的Boolean 环，其中$\dotplus$和$\wedge$分别作为环的加法和乘法运算。

现在，$\forall e\in E(A)$，用I_e表示e在环A中生成的A的主理想，用I_e^*表示I_e在A中的双边零化子，而令$I(E(A))=\{I_e|e\in E(A)\}$，则直接验证可知$\forall e,e_1,e_2\ \ E(A)$，

$$I_{e_1}\cap I_{e_2}=I_{e_1e_2}=I_{e_1\wedge e_2},\ I_{e_1}+I_{e_2}=I_{(e_1+e_2-e_1e_2)}=I_{e_1\vee e_2}。$$

定理2　在集合的包含关系下，$L(I(E(A)))=\langle I(E(A));\vee,\wedge,0,I_1\rangle$是一个Boolean代数。其中

$$I_{e_1}\wedge I_{e_2}=I_{e_1}\cap I_{e_2},\quad I_{e_1}\vee I_{e_2}=I_{e_1}+I_{e_2},\quad I_{e_1},\ I_{e_2}\in I(E(A)),$$

而$\forall e\in E(A)$，I_e^*是I_e在$L(I(E(A)))$中的唯一补。

推论1　在定理2的意义下，一个有单位元的双正则环［2，3］(从而一个有单位元的Boolean 环）A的所有主理想作成一个Boolean 代数。

定理3　射

$$\varphi:\ e\to I_e,\ e\in L(E(A)),\quad \in L(I(E(A))),$$

是L(E(A)) 到L(I(E(A))) 上的一个Boolean 格同构。

根据（［4］§8，定理3）和上面定理3即得

推论2　定理1中的Boolean 环R(E(A)) 的主理想格（Boolean）同构于L(E(A))。

如果$\forall e\in E(A)$，用J_e表示e在R(E(A)) 中生成的主理想，而$e^\vee=\{e_a|,\ e_a\in L(E(A)),\ e_a\leqslant e\}$是L(E(A)) 中的（含$e$）主理想，那么直接验证可知$e^\vee=J_e$，所以若令$e_1^\vee\wedge e_2^\vee=e_1^\vee\cap e_2^\vee$，$e_1^\vee\vee e_2^\vee=e_1^\vee\dotplus e_2^\vee$，则有

* 1984年12月30日收到

推论 3 L(E(A))的所有主理想之集 $\{e^{\vee}\}$在集合的包含关系下关于运算$\wedge$, $\vee$作成一个Boolean代数（其中$e_1^{\vee}\vee e_2^{\vee}$与集合$J_{e_1}\dotplus J_{e_2}$重合）且该Boolean代数与L(I(E(A)))(Boolean)同构。

综上所述，我们便得到

定理 4 设A是任一Boolean代数，那么A的所有主理想之集 $\{x^{\vee}|x\in A\}$（在推论3的意义下）作成一个Boolaen代数，且映射

$$\rho:\ x\to x^{\vee},\quad x\in A,$$

是一个Boolean格同构。

参 考 文 献

〔1〕K. KuraTowsKI and A. MOSTOWSKI, Set Theory, AMsterdam—New York—OXford, 1976。

〔2〕Arens, R. F. Kaplansky, Topological representation of algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 63 (1948), 457—481.

〔3〕Андрунакцевич, В. А., Бирегулярные Кольца, Мат. Сьорник, 39 (81)(1956), 447—464.

〔4〕Л. А. СКорняков, Элементы Теории СТРУКТУР, МОСКВА《НАУКА》, Главная РедАкция Физико—МАтемАтической Литературы, 1982.

Central idempotent elements of and the representation of Boolean algebras

Li Hui Shi

(**Abstract**)

In this article, the author gives another representation of Boolean algebras which is different from that given by Stone.